

Periodický děj

- Děj, který se pravidelně opakuje vždy po stejné době – tzv. periodě
- Pro libovolnou fyzikální veličinu $X(t)$ popisující periodický děj musí platit:

$$X(t) = X(t + nT)$$
- perioda T , frekvence $f = 1/T$
- úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$
- Periodické děje jsou základem pro měření času
- V nejstarším období šlo o periodicitu v nebeských pozorováních spočívajících v pohybu Slunce a Měsíce po obloze – vznik dne, měsíce a roku

Periodicita Sluneční soustavy

Délka dnů a roků na planetách Sluneční soustavy

Planeta	Délka dne	Délka roku
	v násobcích pozemského dne	v násobcích pozemského roku
Merkur	58,6	0,241
Venuše	243	0,615
Mars	1,03	1,881
Jupiter	0,249	11,87
Saturn	0,425	29,45
Uran	0,746	84,07
Neptun	0,795	164,9

Periodicita Sluneční soustavy

Příklad

Odhadněte poloměr planetárního orbitu jako násobek orbitu Země

- Keplerovy zákony

Planeta	Délka roku v násobcích pozemského roku	Vzdálenost od Slunce v násobcích vzdálenosti Země
Merkur	0,241	?
Venuše	0,615	?
Mars	1,881	?
Jupiter	11,87	?
Saturn	29,45	?
Uran	84,07	?
Neptun	164,9	?

$$F_G = F_D$$

$$Tv = 2\pi r = T \sqrt{\frac{\kappa M_s}{r}}$$

$$KT = r^{\frac{3}{2}}$$

$$r / r_z = (T / T_z)^{\frac{2}{3}}$$

Handwritten derivation of Kepler's Third Law:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_s}{r}}$$

$$\kappa \frac{m M_s}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

$$F_G = F_D$$

$$Tv = 2\pi r = T \sqrt{\frac{\kappa M_s}{r}}$$

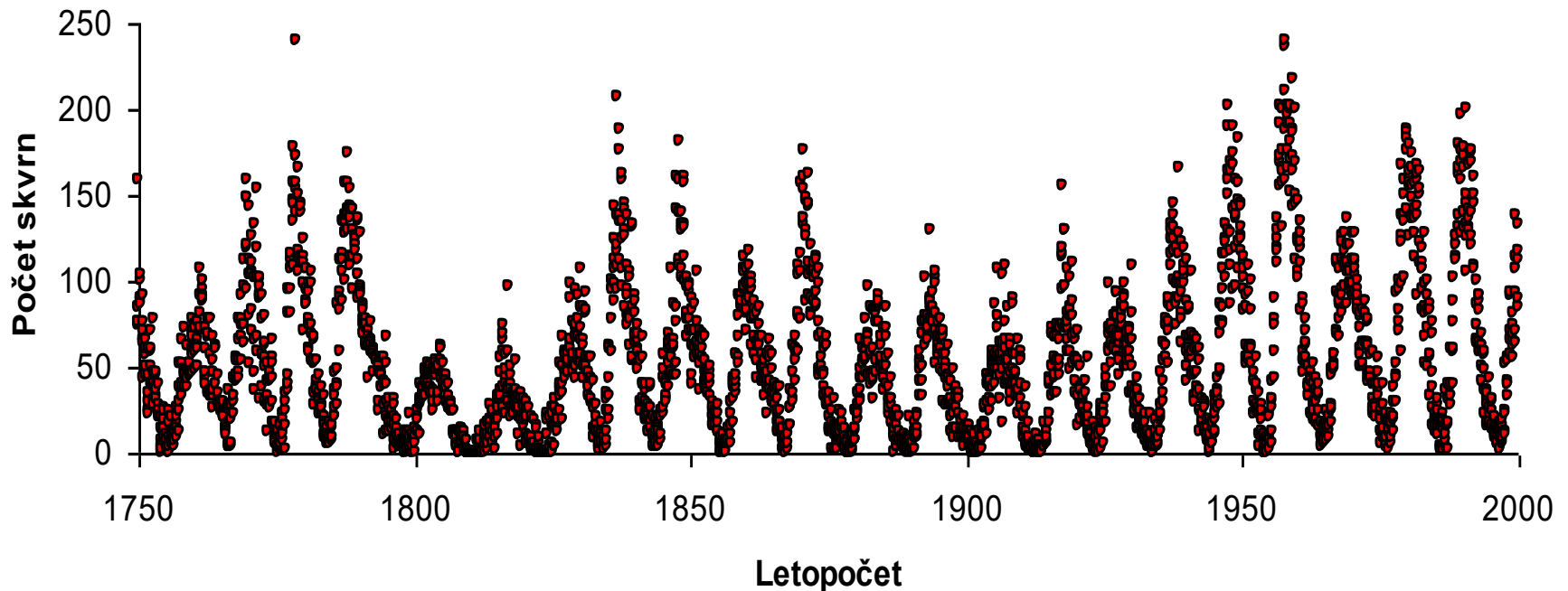
$$KT = r^{\frac{3}{2}}, \quad KT_z = r_z^{\frac{3}{2}}$$

$$r / r_z = (T / T_z)^{\frac{2}{3}}$$

Periodicita Sluneční činnosti

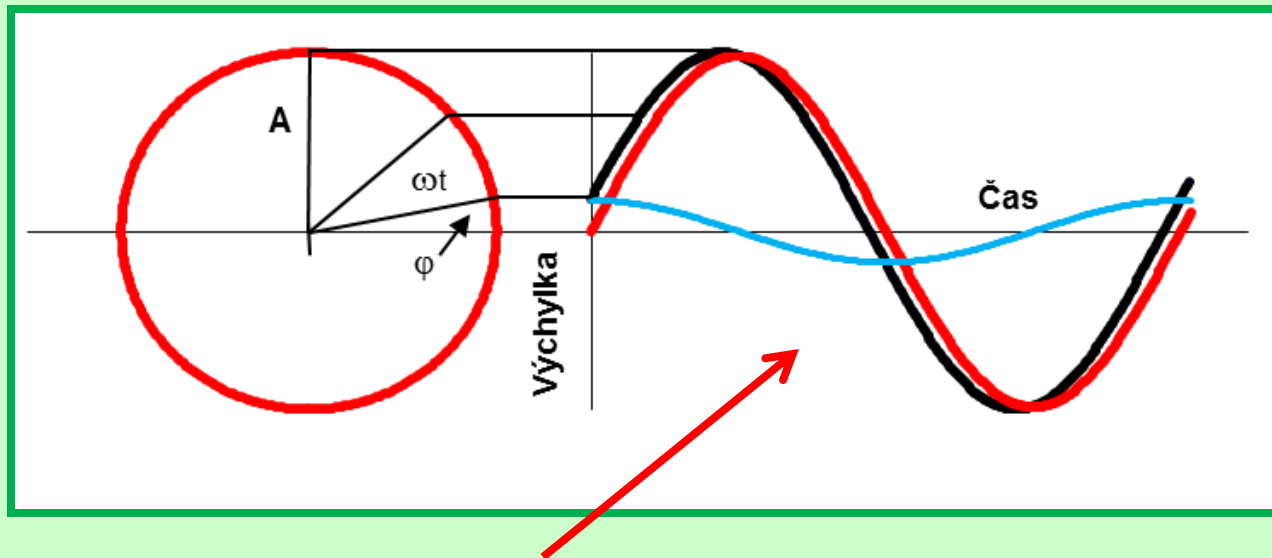
Sluneční skvrny – oblasti s menší povrchovou teplotou než okolí

- složitější periodický děj
- popsán 11letým cyklem



Harmonický děj

- harmonický děj je periodický děj popsáný harmonickou funkcí, tj. sinus resp. kosinus
- k popisu harmonického pohybu lze výhodně využít časový rozvoj kruhového pohybu



ω – konst.

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t$$

x_0, y_0 souřadnice počátečního bodu

$$A = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Zápis s komplexními čísly

- alternativní popis harmonického děje

$$\hat{x}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + iA \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\operatorname{Re}(\hat{x}(t)) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\operatorname{Im}(\hat{x}(t)) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

- y-ovou složku potom vyjádříme:

$$y(t) = \operatorname{Im} \hat{x}(t) = \operatorname{Im} \{ Ae^{i(\omega t + \varphi)} \} = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Komplexní čísla I

Definice

Komplexní číslo:	$\hat{z} = x + iy$
Reálná a imaginární část:	$x = \operatorname{Re} \hat{z}, \quad y = \operatorname{Im} \hat{z}$
Rovnost:	$\hat{z}_1 = \hat{z}_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$
Absolutní hodnota:	$ \hat{z} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$
Komplexně sdružené číslo:	$\bar{z} = x - iy$
Opačné KČ:	$-\hat{z} = -x - iy$
Součet:	$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
Rozdíl obdobně jako součet	
Zákony pro sčítání:	<i>komutativní</i> $\hat{z}_1 + \hat{z}_2 = \hat{z}_2 + \hat{z}_1$
	<i>asociativní</i> $\hat{z}_1 + (\hat{z}_2 + \hat{z}_3) = (\hat{z}_1 + \hat{z}_2) + \hat{z}_3$

Komplexní čísla II

Násobení

Součin čísel:

$$\hat{z}_1 = x_1 + iy_1 \quad a \quad \hat{z}_2 = x_2 + iy_2$$

Definice:

$$\hat{z} = \hat{z}_1 \hat{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Zákony: *komutativní*

$$\hat{z}_1 \hat{z}_2 = \hat{z}_2 \hat{z}_1$$

asociativní

$$\hat{z}_1 (\hat{z}_2 \hat{z}_3) = (\hat{z}_1 \hat{z}_2) \hat{z}_3$$

distributivní

$$(\hat{z}_1 + \hat{z}_2) \hat{z}_3 = \hat{z}_1 \hat{z}_3 + \hat{z}_2 \hat{z}_3$$

Pokud $\hat{z}_1 = \hat{z}_2 = i$, potom pro imaginární jednotku platí:

$$i^2 = i.i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0.0 - 1.1) + i(0.1 + 0.1) = -1$$

Komplexní čísla III

Dělení

Podíl čísel

$$\hat{z}_1 = x_1 + iy_1 \quad a \quad \hat{z}_2 = x_2 + iy_2$$

Definice:

$$\hat{z} = \frac{\hat{z}_2}{\hat{z}_1} = \frac{\hat{z}_2 \bar{z}_1}{\hat{z}_1 \bar{z}_1} = \frac{\hat{z}_2 \bar{z}_1}{|\hat{z}_1|^2} = \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \hat{z}_1 \neq 0$$

Převrácené číslo:

$$\frac{1}{\hat{z}} = \frac{\bar{z}}{|\hat{z}|^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \frac{x - iy}{(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

Důsledky:

$$|\hat{z}| = 0 \iff \hat{z} = 0$$

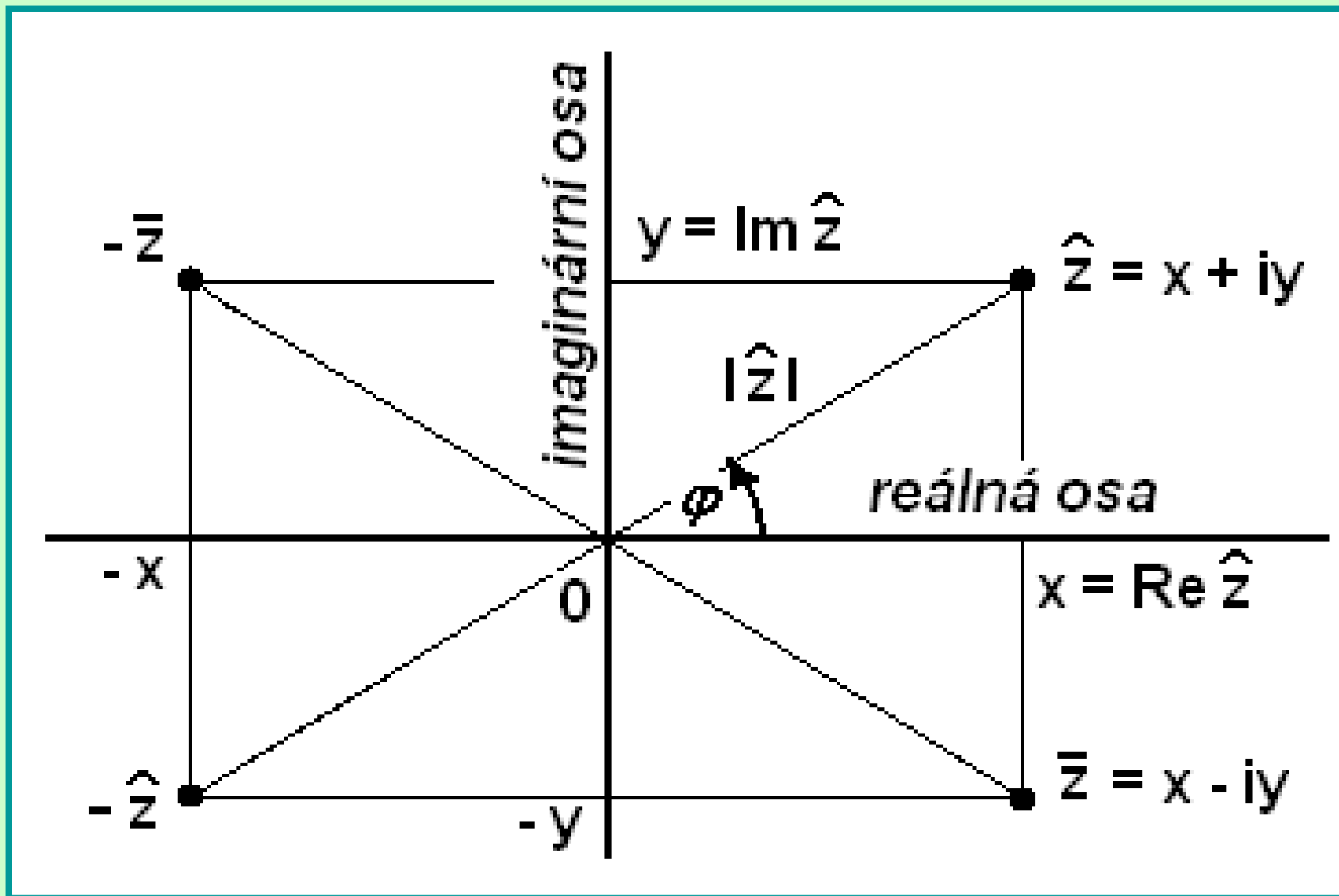
$$|\hat{z}_1 \hat{z}_2| = |\hat{z}_1| |\hat{z}_2|$$

$$|\hat{z}_1 \pm \hat{z}_2| \leq |\hat{z}_1| + |\hat{z}_2|$$

$$|\hat{z}_1 \pm \hat{z}_2| \geq \left| |\hat{z}_1| - |\hat{z}_2| \right|$$

Komplexní čísla IV

Gaussova rovina, fáze φ



Komplexní čísla V

Gaussova rovina, fáze φ , trigonometrický a Eulerův zápis

Fáze (argument) KČ $\varphi = \arg(\hat{z})$ je dán:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

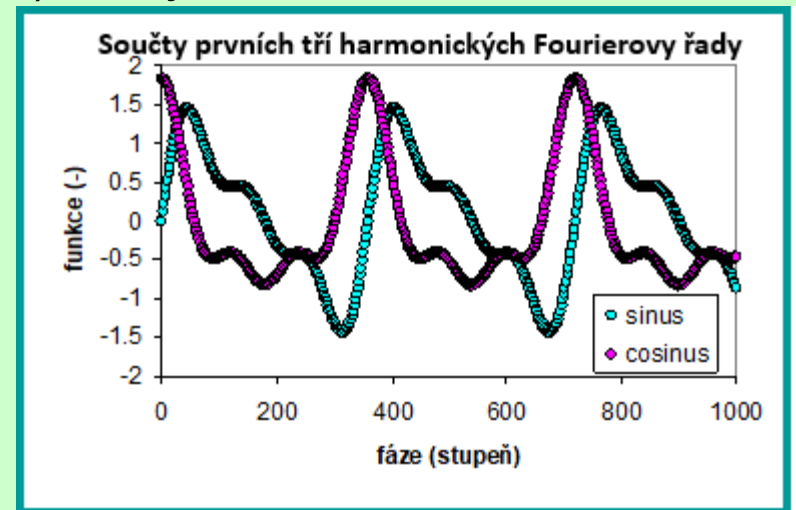
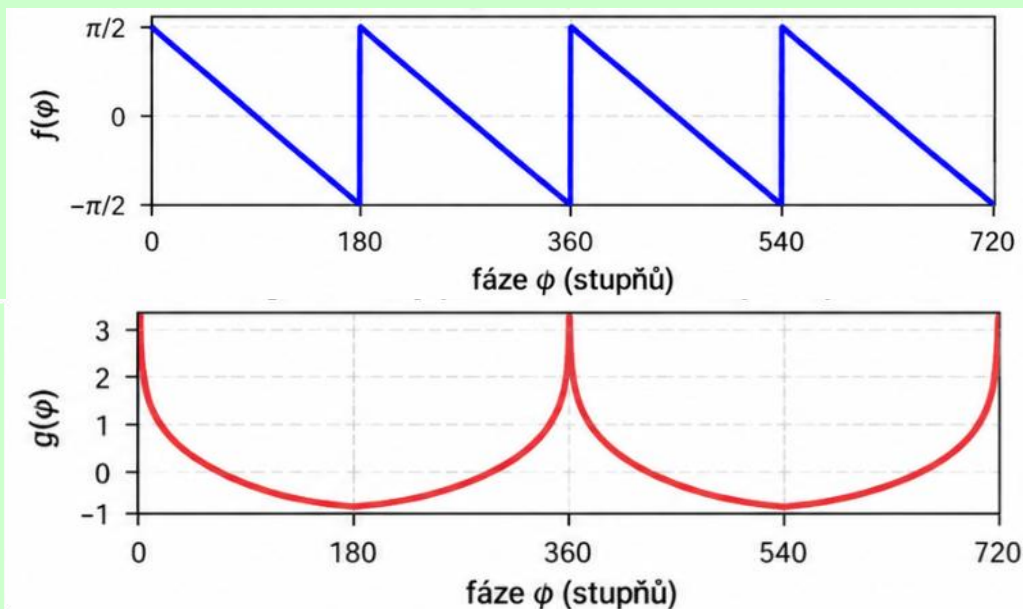
Hlavní hodnota argumentu $\varphi = \text{Arg}(\hat{z})$ je z intervalu $(-\pi, \pi]$.

Trigonometrický zápis: $\hat{z} = x + iy = |\hat{z}|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Eulerův zápis: $\hat{z} = |\hat{z}|e^{i\varphi}$

Anharmonicitá

- harmonický děj - nejjednodušší a nejdůležitější typ periodického děje
- naprostá většina reálných periodických dějů nejsou ději harmonickými, tj. jsou to děje *anharmonické*
- libovolný, tj. i anharmonický periodický děj lze rozložit na řadu harmonických dějů – to umožňuje harmonická (Fourierova) analýza:
- Původní funkce:



$$A_s = \sin(\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\varphi) + \frac{1}{3}\sin(3\varphi)$$

$$A_c = \cos(\varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{3}\cos(3\varphi)$$

Fourierova (harmonická) analýza

Každou periodickou funkci $f(t)$ s periodou T lze rozložit do konvergující nekonečné řady harmonických funkcí:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t], \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

kde koeficienty Fourierova rozvoje jsou:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad B_0 = 0$$

a pro celá $k = 1, 2, 3, \dots$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt$$

- Harmonické funkce v nekonečné řadě mají periody $T, T/2, T/3, \dots$ a úhlové frekvence $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$

- Koeficienty rozvoje A_k a B_k se s rostoucím k obvykle rychle zmenšují - to umožňuje při harmonické analýze pracovat pouze s několika málo složkami

Fourierova transformace

- převádí funkci času $s(t)$ na funkci úhlové frekvence $S(\omega)$:

$$F[s(t)] = S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt = |S(\omega)|e^{i\arg S(\omega)}$$

- $S(\omega)$ je spektrum signálu $s(t)$, které se skládá z amplitudového spektra $|S(\omega)|$ a fázového spektra $\arg S(\omega)$
- klasická Fourierova transformace se používá pro funkce vyjádřené v analytickém tvaru
- pokud ale zpracováváme konkrétní naměřené hodnoty nějakého signálu, používáme diskrétní FT - DFT

Diskrétní Fourierova transformace

(DFT)

- jde o transformaci signálu z časové oblasti do frekvenční oblasti
- tj. vstupem do DFT je diskrétní navzorkovaný signál a výstupem je diskrétní spektrum tohoto signálu – informace o frekvenčních složkách v něm obsažených
- matematicky jde o transformaci mezi posloupnostmi:

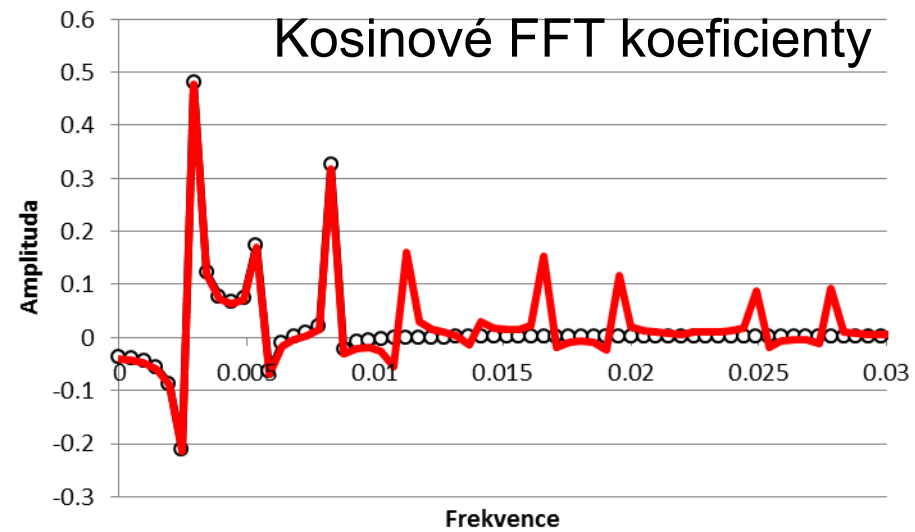
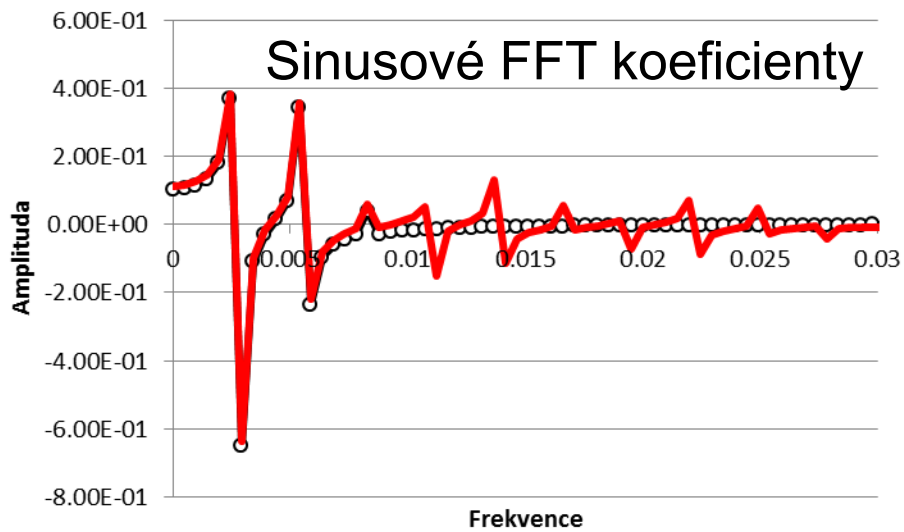
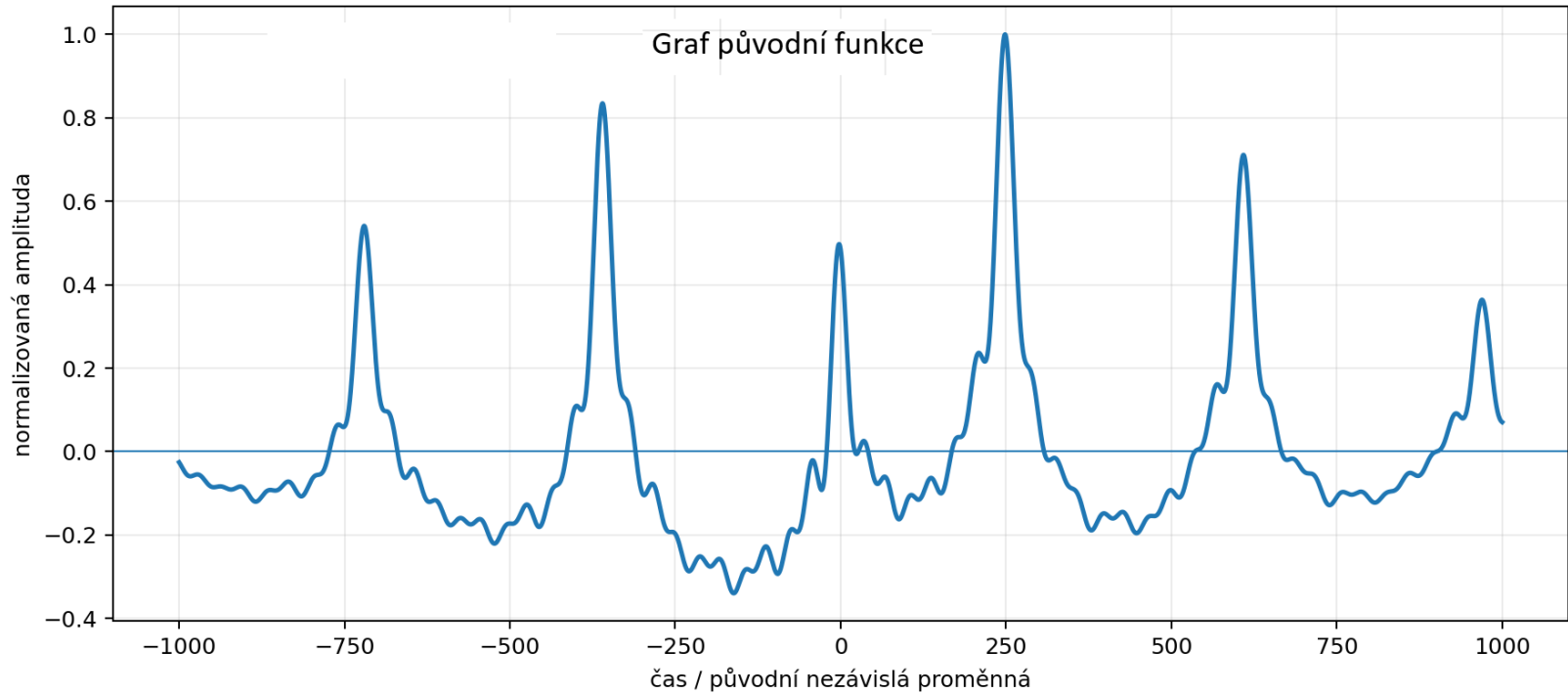
$d(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ a $D(n)$, $n = 0, \dots, N-1$:

$$D(n) = \sum_{k=0}^{N-1} d(k) e^{-ink 2\pi / N} \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$d(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D(n) e^{ink 2\pi / N} \quad k = 0, \dots, N-1$$

- dnes se využívá zejména tzv. Rychlá Fourierova Transformace (FFT) – speciální algoritmus DFT

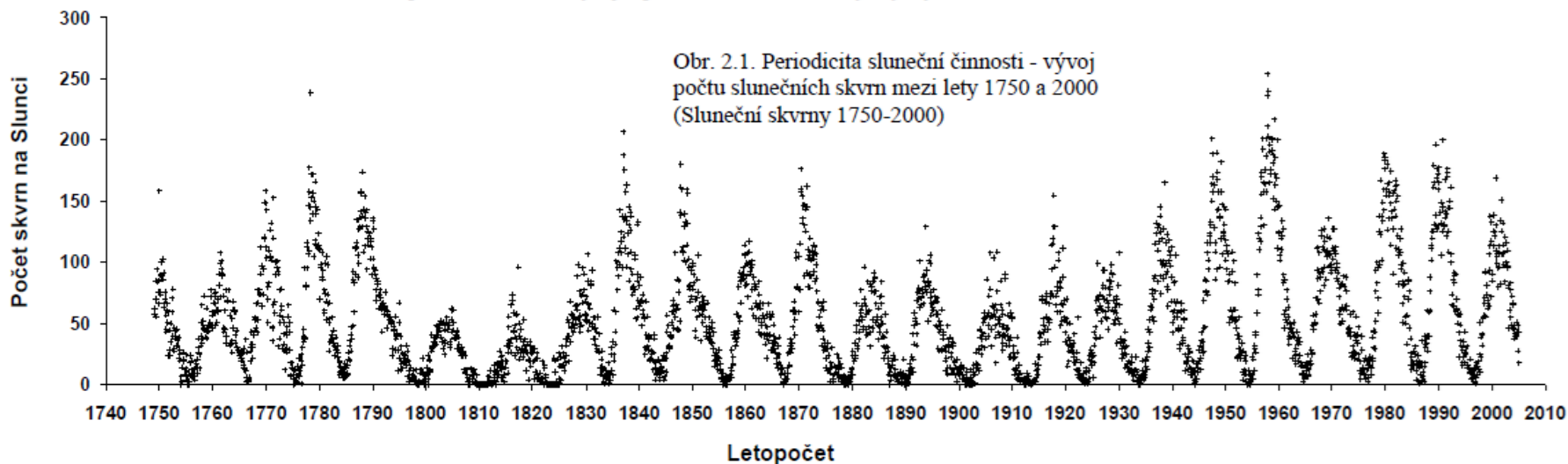
FFT funkcí uváděných u anharmonicity



Cvičení

1. Určete Fourierův rozvoj pilovitých kmitů definovaného v intervalu $(-\pi, \pi)$ předpisem $f(t) = t$.
2. S použitím FFT analyzujte průběh sluneční aktivity.
3. Procvičujte dělení a násobení komplexních čísel.
4. Procvičujte trigonometrické vyjádření komplexních čísel.

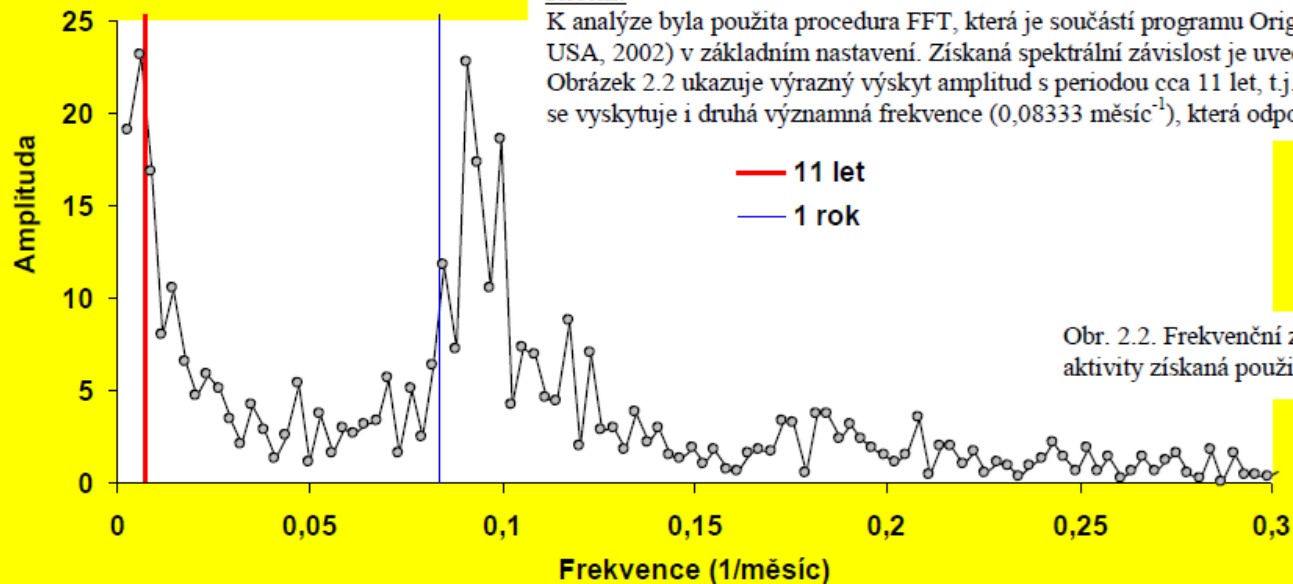
Příklad 2/2: S použitím FFT analyzujte průběh sluneční aktivity (výskyt frekvenčních závislostí) v obr. 2.1.



Řešení:

K analýze byla použita procedura FFT, která je součástí programu Origin, Version 7 (OriginLab, Northampton, USA, 2002) v základním nastavení. Získaná spektrální závislost je uvedena v obr. 2.2.

Obrázek 2.2 ukazuje výrazný výskyt amplitud s periodou cca 11 let, t.j. frekvencí cca $0,007576 \text{ měsíc}^{-1}$. V grafu se vyskytuje i druhá významná frekvence ($0,08333 \text{ měsíc}^{-1}$), která odpovídá době mírně kratší než 1 rok.



Obr. 2.2. Frekvenční závislost amplitud sluneční aktivity získaná použitím FFT na data v obr. 2.1