Vznik stojatého vlnění

- interferencí protisměrných postupných vln z míst o souřadnicích x_1 a x_2 s fázemi

$$\varphi_1 = -\frac{\omega}{c}(x - x_1), \quad \varphi_2 = \frac{\omega}{c}(x - x_2)$$

- obě vlny budou mít stejné fáze v místech o souřadnicích x_k, daných podmínkou: $\varphi_1 = \varphi_2 + k.2\pi$, kde k = 1, 2, 3, …

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{kc\pi}{\omega} = \bar{x} - \frac{k}{2}\lambda$$

- rozepsat

$\bar{x}$ - střední vzdálenost mezi oběma zdroji

Transformace souřadnic: $x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{kc\pi}{\omega} = \bar{x} - \frac{k}{2}\lambda$ - nový počátek

$z = x - \bar{x}$, $\delta_v = (x_2 - x_1)/2$

$$x - x_1 = z + \frac{x_2 - x_1}{2} = z + \delta_v$$

$$x - x_2 = z + \frac{x_1 - x_2}{2} = z - \delta_v$$

$$\varphi_1 = -\frac{\omega}{c}(z + \delta_v), \quad \varphi_2 = \frac{\omega}{c}(z - \delta_v)$$

- rozepsat

$\varphi_1 = -\omega t_s - 2\pi \frac{z}{\lambda}, \quad \varphi_2 = -\omega t_s + 2\pi \frac{z}{\lambda}$, kde $t_s = \delta_v/c$ - čas setkání se obou vln uprostřed intervalu (x_1, x_2)

Vznik stojatého vlnění

- obě protisměrné vlny lze pak zapsat:

Stejná amplituda protisměrných vln

$$u_1 = A\sin[\omega(t - t_s) - 2\pi \frac{z}{\lambda}]$$

$$u_2 = A\sin[\omega(t - t_s) + 2\pi \frac{z}{\lambda}]$$

- obě výchylky se liší znaménkem fáze

Složení obou vln:

$$\boxed{u = u_1 + u_2 = 2A\cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \sin \omega(t - t_s)}$$

Z výsledné rovnice plyne: interferencí dvou postupných protiběžných vln vznikají harmonické kmity se stejnou fází, ale proměnlivou amplitudou A_v = 2*A* cos(2*πz*/*λ*), která závisí na souřadnici *z*, tj. vzdálenosti daného bodu od $\bar{x}$.

Největší výkmit 2*A* odpovídá místům s největší amplitudou A_v, tedy tam kde cos(2*πz*/*λ*) nabývá hodnot ±1, tj. pro 2*πz*/*λ* = 0, π, 2π, .. Body s tímto maximálním výkmitem se nazývají *kmitny*. Uprostřed mezi kmitnami leží body v nichž je amplituda A_v nulová. Tyto body nazýváme *uzly*.

Animace

Souřadnice – kmitny: z = ±kλ/2

Stojaté podélné vlnění

Souřadnice – uzly: z = ±(2k+1)λ/4

Při postupném vlnění kmitají všechny body se stejným výkmitem, avšak různou fází, která se šíří fázovou rychlostí vlnění. Při stojatém vlnění kmitají všechny body se stejnou fází v bodech vzdálených od sebe o vlnovou délku a s opačnou fází v bodech vzdálených o půl vlny. Výkmit v případě stojatých vln je periodicky závislý na poloze bodu.

Stojaté vlny ve strunách

Obecně platí: Pokud se postupná vlna odráží na volném resp. pevném konci, odráží se se stejnou resp. opačnou fází a vznikající stojatá vlna má na tomto konci kmitnu resp. uzel

Struny: na obou koncích upevněná a napjatá vlákna z různých materiálů

- volné kmity struny jsou tlumené, harmonické a vznikají interferencí postupných vln odrážejících se od pevných okrajů struny

Okrajové podmínky: na obou koncích struny délky *l* jsou uzly: $n\frac{\lambda_n}{2} = l$

***n* = 1, 2, 3... udává základní (*n* = 1) resp. vyšší frekvenci kmitů (vyšší harmonickou)**

Platí: $\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2\pi c}{\omega_n}$ **, je tedy** $\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

Platí $\boxed{c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}}$**, kde** σ **- normálové napětí ve struně,** ρ **- hustota struny**

Úhlové frekvence struny lze vyjádřit také: $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}k_\lambda = ck_\lambda}$ **- dispersní vztah**

- vztah mezi úhl. frekvencí a úhl. vlnočtem $k_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda_n}$

- tato rovnice platí pouze pro celá *n* – má diskrétní (nespojitý) charakter

Stojaté vlny v tenkých tyčích

Elasticské řešení

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

- Podélné kmity: **Vlastní kmity tyče jsou určeny stojatými harmonickými vlnami vzniklými interferencí postupných vln v tyči, šířících se oběma hlavními směry. Jejich frekvence je dána podobně jako v případě strun uspořádáním celistvých čtvrtvln podél tyče tak, aby byly zachovány uzly v místě upevnění (fixace) tyče a případných kmiten na volných koncích tyče. Dále je zřejmé, že ani úhlová frekvence vlastních kmitů a ani rychlost jejich šíření tyčí nejsou závislé na průřezu tyče.**

V případě *torsních kmitů* se tvar vlnové rovnice zachovává, pouze modul pružnosti v tahu *E* je v této rovnici nahrazen modulem pružnosti ve smyku *G*, přičemž význam okrajových podmínek zůstává zachován. Největší změna tedy spočívá v rozdílné rychlosti šíření torsních kmitů. Vzhledem k tomu, že $G \approx E/[2(1+\mu)]$, je rychlost torsních vln $\sqrt{2(1+\mu)}$ - krát menší než rychlost šíření podélných vln (μ značí Poissonův poměr).

Příčné kmity: **E je modul pružnosti tyče, J moment setrvačnosti příčného průřezu tyče, l její délka, m' hmotnost jednotkové délky tyče, k_λ úhlový vlnočet, $n = l/\lambda$ počet vlnových délek na délce tyče a K_n konstanta**

$$\omega_n = 2\pi K_n \sqrt{\frac{EJ}{l^4 m'}}$$

Stojaté vlny v dalších objektech

Z hlediska akustiky jsou velmi důležité vlastní kmity desek a blan, které závisejí nejen na jejich rozměrech a tvarech, ale také na místech jejich upevnění. Polohy uzlů a kmiten na rozkmitané desce nebo bláně je možné určit z rozmístění drobných částic nasypaných na jejich povrch. Hrubší částice (např. písek) se usazuje v uzlových bodech nebo čarách a tvoří tzv. Chladniho obrazce. Jemnější částice (např. lykopodium) se usazují naopak v místech kmitových vrcholů (kmiten) a tvoří tzv. Savartovy obrazce.

- viz videa

Velký význam mají tzv. kulové (sferoidální) kmity, tedy kmity kulovitých těles. Mezi těmito kmity velkou úlohu hrají vlastní kmity kulových vesmírných těles, včetně Země.

$$\boxed{f \approx \sqrt{\frac{Er}{m}}}$$

Kmity blan

***E* – modul pružnosti, *r* – poloměr, *m* - hmotnost**

Energie elastického vlnění

- šířící se vlna vyvolá změny energie prostředí, kterým vlna prochází
- okamžitá výchylka prostředí vyvolaná postupnou vlnou: $\boxed{u(t,x) = A\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$

- omezení na část prostředí o <u>objemu</u> Δ*V*, <u>hmotnosti</u> Δ*m*, <u>hustotě</u> *ρ* a <u>výchylce</u> prostředí z rovnovážné polohy *u*

$$v(t,x) = \frac{du}{dt} = A\omega\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\cos^2\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

$$E_p = \int_0^{\Delta l} F\,dl = \int_0^{\Delta l} ES\frac{\Delta l}{l_0}d(\Delta l) = \frac{1}{2}ES\frac{\Delta l^2}{l_0} = \frac{1}{2}ESl_0\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \quad \frac{\Delta l}{l_0} \approx \frac{du}{dx} = -\frac{A\omega}{c}\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\frac{EA^2\omega^2\Delta V}{c^2}\cos^2\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

- ze srovnání vztahů pro E_k a E_p plyne, že obě části energie jsou ve fázi (zároveň dosahují maxima a minima) - to je podstatná odlišnost energie části prostředí od energie prostého kmitajícího bodu

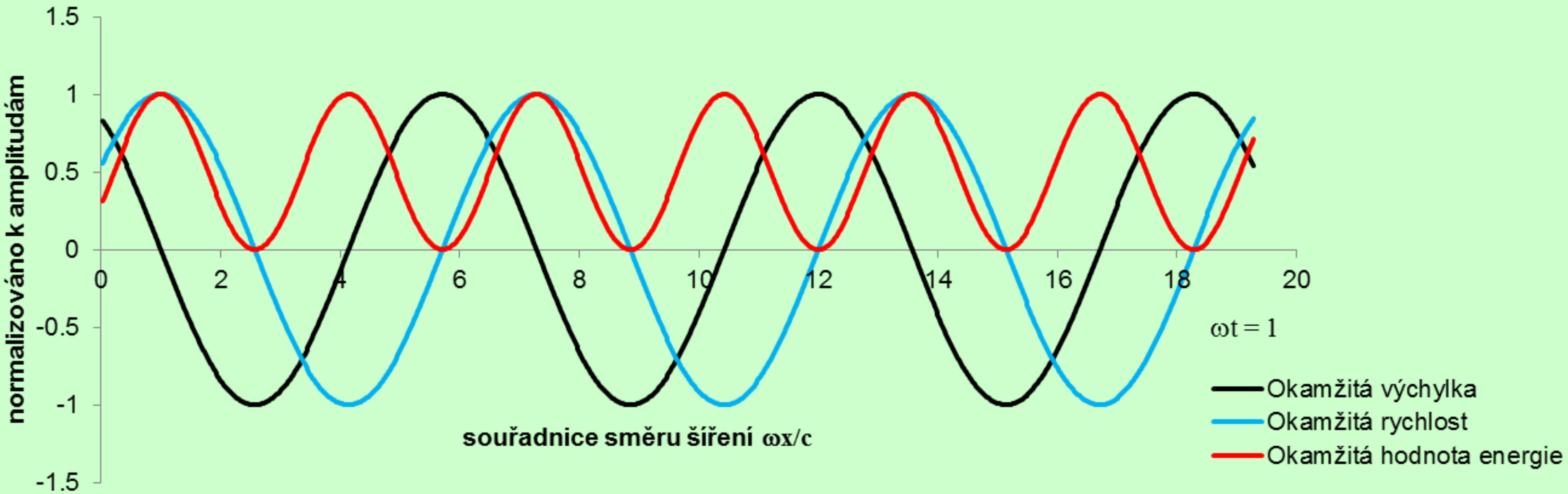
Energie elastického vlnění

- celková energie části prostředí nezůstává konstantní (na rozdíl od celkové energie kmitání samostatného hmotného bodu, ale platí:

$$\boxed{E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{E}{c^2}\right)A^2\omega^2\Delta V\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

V elastickém prostředí $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ **, potom:** **- rozepsat (vyjádřením hustoty)**

$$\boxed{E_c = \rho A^2\omega^2\Delta V\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$



Hustota energie, tok vlnění

$$\boxed{w = \frac{E_c}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Hustota energie v elastickém prostředí

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

Střední hustota energie

$$\boxed{P_e = \overline{w} S c = \frac{S}{2}\rho A^2 \omega^2 c}$$

Střední tok vlnění plochou *S* (W)

$$\boxed{\Psi = \frac{P_e}{S} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 c}$$

Hustota toku vlnění ($W.m^{-2}$)

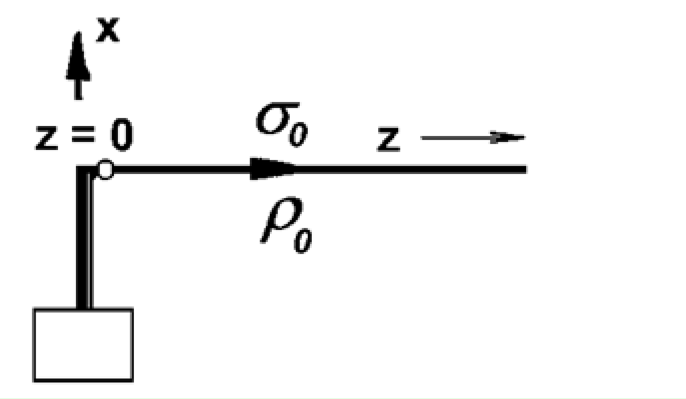
$$\boxed{\Psi_k = \frac{P_e}{4\pi R^2}}$$

Hustota toku vlnění kulové vlny ve vzdálenosti *R* od jejího zdroje

Animace zdrojů: **jednoduché**

další

Vznik postupné vlny ve struně



$$c = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho_0}}$$

c **– fázová rychlost příčných vln ve struně**

σ_0 **– osové napětí ve struně**

ρ_0 **– hustota struny**

- struna reprezentuje otevřený systém, ve kterém je buzena postupná vlna šířící se v kladném směru *z*:

$$\boxed{u(t,z) = A\sin(\omega t - k_\lambda z)}$$

$k_\lambda = 2\pi/\lambda = \omega/c$ **- úhlový vlnočet**

Zavádíme veličinu charakterizující stav konkrétní struny, konstantu nezávislou na pohybu struny. Je to <u>kalibrační konstanta</u> zprostředkovávající vztah mezi počáteční příčnou rychlostí vlny *c* a brzdícím napětím σ_0. Nazývá se <u>*akustický odpor Z*</u>.

$$\boxed{Z = \frac{\sigma_0}{c} = \sigma_0\sqrt{\frac{\rho_0}{\sigma_0}} = \sqrt{\sigma_0\rho_0}}$$

Ukončení a spojení strun

Buzená vlna je popsána rovnicí: $u_1(t,z) = A\sin(\omega t - k_{\lambda 1} z)$

V místě přechodu z prostředí o akustickém odporu Z_1 do prostředí o akustickém odporu Z_2 dochází ke vzniku odražené vlny, která se skládá s původní vlnou.

Úplná výchylka *u* po složení přímé a odražené vlny pro *z* < 0 je pak dána rovnicí:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,z) &= u_1(t,z) + RA\sin(\omega t + k_{\lambda 1} z), \\ u(t,z) &= A\sin(\omega t - k_{\lambda 1} z) + RA\sin(\omega t + k_{\lambda 1} z) \quad \text{(a)}, \end{aligned}}$$

kde *R* je koeficient odrazu

$$\boxed{R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

- rovnice ukazuje, že odražená vlna je vůči dopadající vlně fázově posunutá (rozdíl ve znaméncích u členu $k_{\lambda 1}z$).

Průchod vlny rozhraním strun

Vlna obecně prochází rozhraním mezi strunami. Obecně tento fakt můžeme vyjádřit rovnicí vlny v prostředí pro *z* > 0:

$$u_2(t,z) = TA\sin(\omega t - k_{\lambda 2} z)$$

kde *T* je koeficient průchodu,
A je amplituda dopadající vlny,
$k_{\lambda 2}$ je úhlový vlnočet v prostředí pro *z* > 0

Protože výchylka vln v obou částech prostředí musí být na rozhraní spojitou funkcí, musí platit:

$$u_2(t,0) = u(t,0) = (1+R)u_1(t,0) - \text{viz (a), tj. } TA\sin\omega t = (1+R)A\sin\omega t \Rightarrow \boxed{T = 1 + R}$$

- rozepsat

Průchod vlny rozhraním strun

Různé varianty spojení struny s dalším prostředím:

Název	R	T	Z_2/Z_1	**Charakteristika**
Pevné spojení	**-1**	**0**	∞	**Nekonečný odpor Z_2, stojaté vlnění s uzlem pro z = 0**
Prostý přechod	**0**	**1**	**1**	**Shoda impedancí (ne shoda prostředí)**
Volný konec	**1**	**2**	**0**	**Nulový odpor Z_2, čistá stojatá vlna s uzlem pro $z = -\lambda/4$ a kmitnou pro z = 0**

- **pokud R je větší než -1 a menší než 1, pak vlna vzniklá superpozicí původní a odražené vlny <u>není ani čistě stojatou a ani čistě postupnou vlnou</u>**

- **takováto vlna se nazývá sinusoidální vlnou**

- **každá sinusoidální vlna může být reprezentována superpozicí dvou vln buď stojatých, anebo postupných s opačným směrem šíření**

[Odraz vlny na rozhraní]