PŘÍKLADY POUŽITÍ BERNOULLIHO ROVNICE

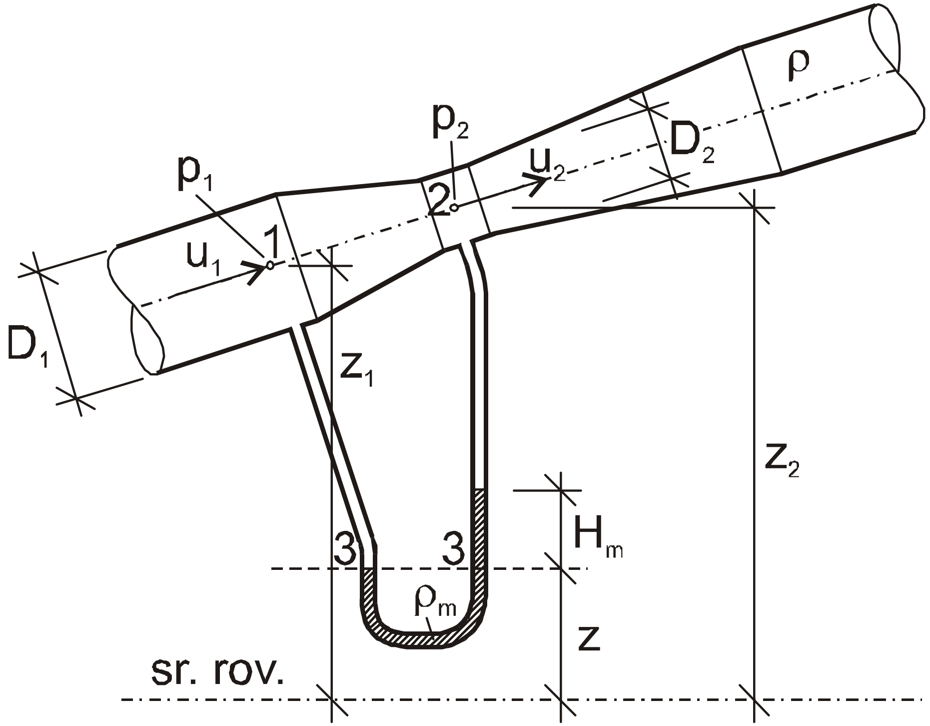
VENTURIMETR

Jednoduché zařízení, kterým se zúží proud, se nazývá venturimetr. S jeho využitím je možné měřit průtok.

Pro průřezy 1 - 2 je třeba napsat Bernoulliho rovnici a současně použít rovnice kontinuity

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$Q = u_1 S_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 \frac{S_2}{S_1} = m u_2$$



Venturimetr

kde m je zúžení proudu. Po dosazení rovnice kontinuity do Bernoulliho rovnice platí

$$u_2^2 - (m u_2)^2 = 2g\left[\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Q = u_2 S_2 = \frac{S_2}{\sqrt{1-m^2}} \sqrt{2gH} = \mu_v S_2 \sqrt{2gH}$$

kde μ_v je součinitel průtoku venturimetrem a H je rozdíl tlakových výšek, který bychom odečetli při měření otevřenými **piezometry**.

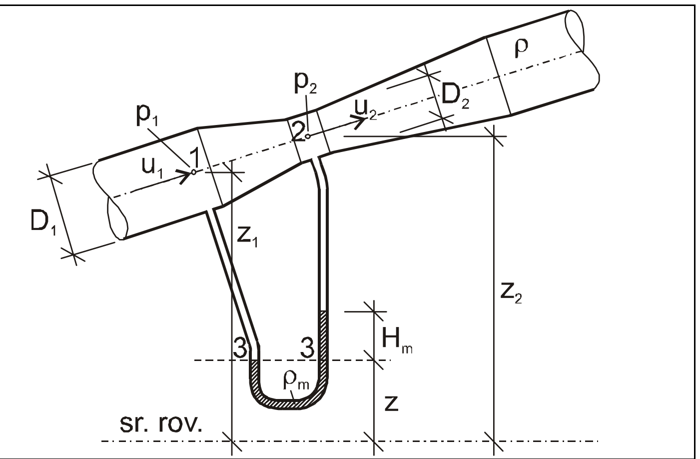
Při proudění skutečné kapaliny dochází ke ztrátám, takže ve výrazu pro součinitele μ_v se projeví ztrátový součinitel K_v a Coriolisovo číslo α

$$\mu_v = \frac{K_v}{\sqrt{\alpha\left(1-m^2\right)}}$$

Hodnoty součinitele průtoku venturimetrem udává výrobce těchto zařízení. Hodnota rozdílu hladin H, který bychom odečítali v otevřených piezometrech, je dána rovností tlaků v rovňové ploše 3

$$p_1 + \rho g\left(z_1 - z\right) = p_2 + \rho g\left(z_2 - z - H_m\right) + \rho_m g H_m \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \left(z_2 - z_1\right) = H_m\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right)$$

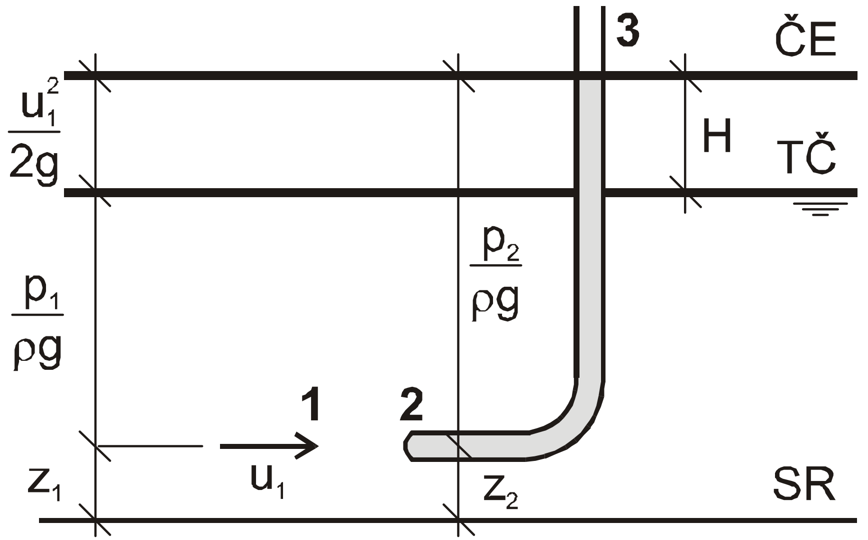


takže pro průtok se dostane vztah

$$Q = \mu_v S_2 \sqrt{2gH_m\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right)}$$

PITOTOVA TRUBICE

Pitotova trubice je trubice zahnutá do H pravého úhlu a na jednom konci opatřená zúžením, Trubice se vloží do měřeného místa v proudící kapalině směrem proti proudu. Kapalina vnikne do trubice a vystoupí ve svislém rameni nad hladinu do úrovně 3. Stoupnutí hladiny v trubici je způsobeno přeměnou kinetické energie proudící kapaliny na energii potenciální. Jestliže se napíše Bernoulliho rovnice pro proudové vlákno v místech 1 a 2, platí vztah:



Pitotova trubice

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$$

Protože je $u_2 = 0$, $z_1 = z_2$ a lze označit $u_1 = u$, platí

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = H = \frac{u^2}{2g}$$

kde H je převýšení hladiny ve svislém rameni nad volnou hladinou. Pitotova trubice tak vlastně určuje rychlostní výšku, takže bodová rychlost u se vypočte ze vztahu:

$$u = \sqrt{2gH}$$

Při proudění skutečné kapaliny vznikají ztráty; a proto je třeba výpočet bodové rychlosti opravit opravným součinitelem $\varphi < 1$, který se musí určit experimentálně v hydraulické laboratoři:

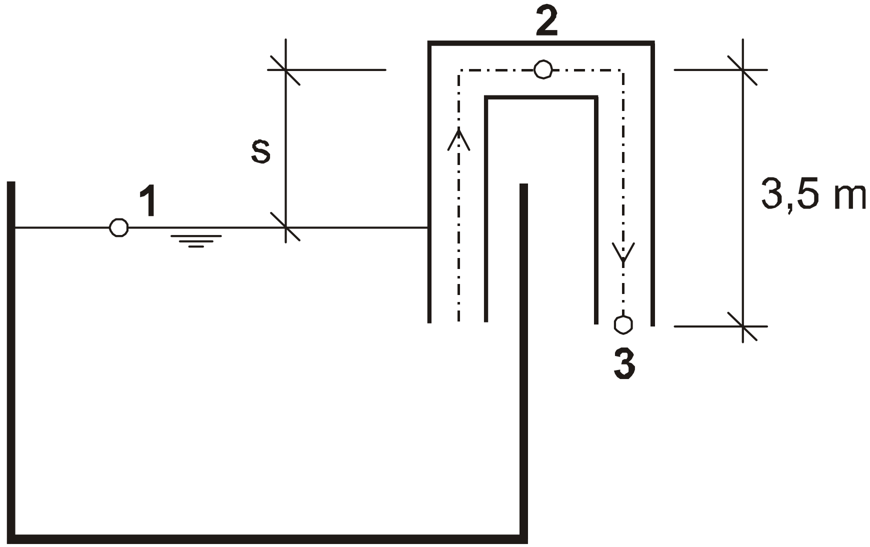
$$u = \varphi\sqrt{2gH}$$

NÁSOSKA

Násoska je krátké potrubí, které dopravuje kapalinu přes vertikální překážku. Voda proudí násoskou z velké horní nádrže a má výtok do volna. Vrchol násosky je o hodnotu s = 2 m nad horní hladinou, průměr násosky je D = 0,2 m.

a) Stanovte průtok násoskou, jestliže se ztráty při proudění neuvažují.

b) Stanovte průtok násoskou, jestliže se ztráty při proudění vyjádří jako násobek rychlostní výšky a to v případě celé délky násosky součinitelem K = 0,29 a pro úsek mezi horní nádrží a vrcholem hodnotou K = 0,193. Vypočítejte v obou případech hodnotu tlakové výšky ve vrcholu násosky.



Násoska

Řešení násosky

a) Je třeba napsat Bernoulliho rovnici pro horní hladinu a pro těžiště výtokového průřezu, kde se zvolí srovnávací rovina

$$z_1 + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{u_n^2}{2g} = z_2 + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{u_3^2}{2g}$$

a po dosazení

$$u_3 = \sqrt{2gz_1}\ ,\ u_3 = \sqrt{19{,}62.1{,}5} = 5{,}42\,m.s^{-1}$$

takže z rovnice kontinuity pro průtok platí

$$Q = u_3 S$$

$$Q = 5{,}42\pi\frac{0{,}02^2}{4} = 0{,}170\,m^3s^{-1}$$

K výpočtu tlakové výšky ve vrcholu je třeba napsat Bernoulliho rovnici pro průřez v hladině a pro vrchol násosky. Srovnávací rovinu zvolme v horní hladině

$$0 + \frac{p_a}{\rho g} + 0 = 2 + \frac{p_{2s}}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_{2s} - p_a}{\rho g} = -2 - \frac{u_2^2}{2g} = -2 - 1{,}45 = -3{,}45\,m$$

Ve vrcholu násosky je podtlaková výška - 3,45 m vodního sloupce. Protože v případě ideální kapaliny je teoretická podtlaková výška přibližně - 10 m, násoska by fungovala.

b) Pro Bernoulliho rovnici v horní hladině a těžišti výtokového průřezu platí

$$1{,}5+\frac{p_a}{\rho g}+0=0+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha v_3^2}{2g}+0{,}29\,\frac{\alpha v_3^2}{2g}$$

$$V_3=\frac{1}{\sqrt{1+0{,}29}}\sqrt{2gH}=0{,}88\sqrt{19{,}62.1{,}5}=4{,}77\,\mathrm{m.s^{-1}}\ ,\quad Q=0{,}15\,\mathrm{m^3s^{-1}}$$

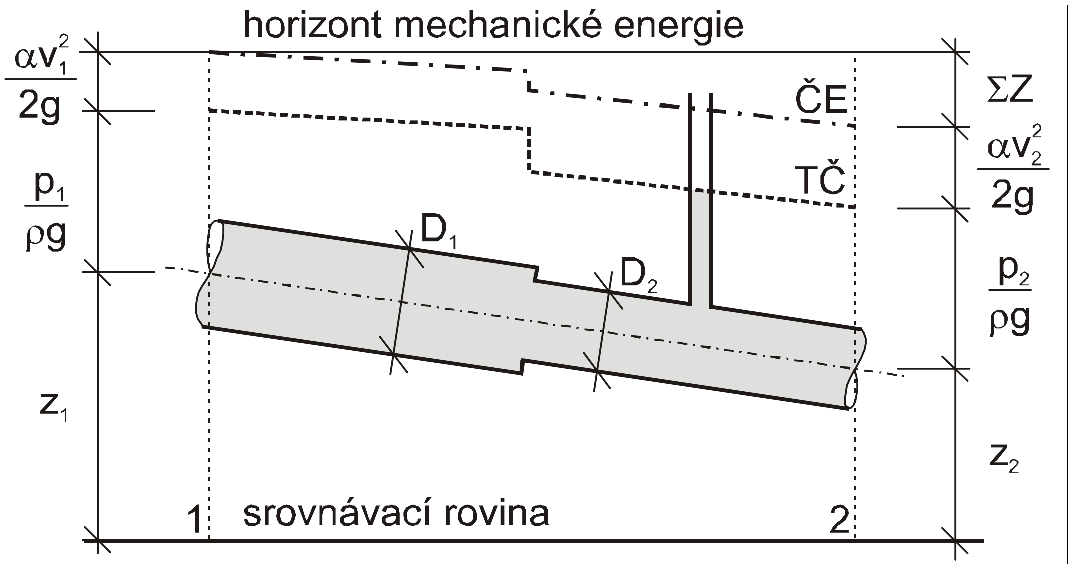
$$0+\frac{p_a}{\rho g}+0=2+\frac{p_{2s}}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+0{,}193\,\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_{2s}-p_a}{\rho g}=-2-\frac{v_2^2}{2g}-0{,}193\,\frac{v_2^2}{2g}=-2-1{,}16-0{,}22=-3{,}38\,\mathrm{m}$$

USTÁLENÉ PROUDĚNÍ V POTRUBÍ

Základní rovnice

Při řešení ustáleného proudění v potrubí je třeba pro proudění skutečné nestlačitelné kapaliny použít Bernoulliho rovnice, rovnice kontinuity a rovnic pro ztráty. Bernoulliho rovnice vyjadřuje ve dvou zvolených průřezech bilanci mechanické energie proudu.



$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + \sum Z$$

Rovnice kontinuity se používá ve tvaru

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Celkové ztráty jsou dány součtem ztrát třením a místních ztrát

$$\sum Z = \sum Z_t + \sum Z_m$$

Ztráty třením

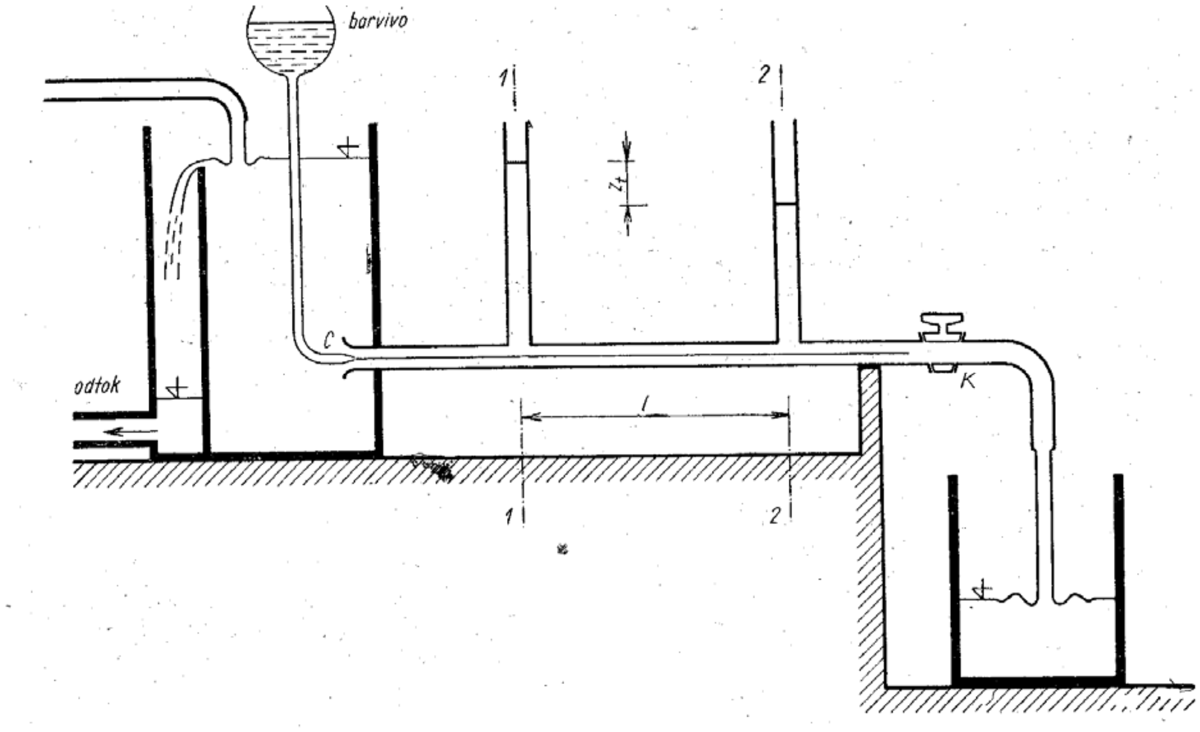
Ztráty třením jsou způsobeny viskozitou skutečné kapaliny, místní ztráty vznikají všude tam, kde dochází k deformaci rychlostního pole, např. při proudění z nádrže do potrubí, při změně průměru potrubí, v uzávěru apod. Nejobecnější rovnicí pro výpočet ztrát třením je **Darcy-Weisbachova rovnice**

$$Z_t = i_E L = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

i_E ... sklon čáry energie (hydraulický sklon)
λ ... součinitel tření
L ... délka potrubí (m)
D ... vnitřní průměr potrubí (m)
v ... průřezová rychlost ($m.s^{-1}$)

Významný vliv na velikost ztráty třením má součinitel tření λ, který obecně závisí na režimu proudění a drsnosti potrubí. Rozeznávají se dva základní režimy proudění a to **laminární a turbulentní**, přičemž rozlišujícím kritériem je bezrozměrné **Reynoldsovo číslo.**

REYNOLDSŮV POKUS



Určení ztráty třením Z_t na dráze L je dáno úbytkem tlakové výšky v piezometrech

$$Z_t = IL$$

Závislost na rychlosti je udávána pomocí vztahu:

$$Z_t = a v^m$$

Logaritmováním dostaneme přímkovou závislost:

$$\log Z_t = \log a + m \log v$$

Laminární proudění

Ztráty rostou se zvyšováním rychlosti podle přímky o směrnici m=1:

$$Z_t = av$$

Kvadratické pásmo odporů

m = 1,75 až 2, nejčastěji 2

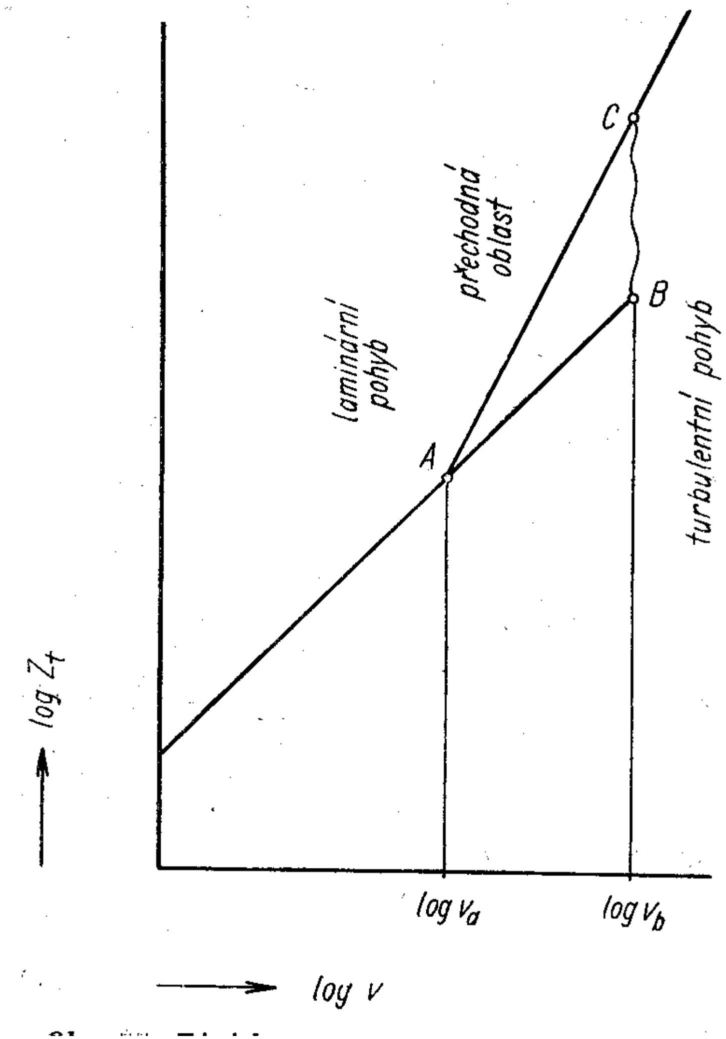
$$Z_t \approx av^2$$

Přechodná oblast

V úseku ABC pohyb může být laminární i turbulentní.

Pro přechod režimů proudění je rozhodující bod A, který se dá charakterizovat pomocí rychosti v, průměrem trubice d a viskozitou ν - dohromady vytváří **Reynoldsovo číslo:**

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$



Obecněji se místo d používá charakteristický délkový rozměr proudu.

U otevřených koryt se tedy uvažuje hydraulický poloměr R:

$$Re_R = \frac{vR}{\nu}$$

Pro kruhový průřez je R=d/4, pak Reynoldsovo číslo je

$$Re_R = \frac{Re}{4}$$

Hranici A odpovídá pro všechny kapaliny stálá hodnota Reynoldsova čísla – kritické Reynoldsovo číslo:

pro kruhové potrubí:

$$Re_k \approx 2320$$

při menší hodnotě je zajištěno laminární proudění

při plynulém zvyšování rychlosti se udrží laminární režim až do Re ≈13800

další zrychlování vede k turbulentnímu režimu pro otevřená koryta:

laminární režim

$$Re_{Rk} \approx 580$$

přechodná oblast

$$Re_R \approx 580 - 3450$$

turbulentní režim

$$Re_R > 3450$$

Podmínky pro laminární režim jsou splněny za malých rychlostí v malých průřezech nebo u silně vazkých tekutin, zvlášť při nízkých teplotách

Místní ztráty

Místní ztráta se nejčastěji vyjadřuje jako část rychlostní výšky, přičemž se uvažuje průřezová rychlost v potrubí za místní ztrátou

$$Z_m = \zeta_m \frac{v^2}{2g}$$

takže pro celkovou ztrátu platí

$$\sum Z = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta_m \right) \frac{v^2}{2g}$$

Dříve se rovněž používalo tzv. náhradní délky potrubí L_n, což je taková délka potrubí stejného průměru a drsnosti, pro kterou je místní ztráta stejná jako ztráta třením

$$\zeta_m \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{L_n v^2}{D\,2g} \quad \Rightarrow \quad L_n = D \frac{\zeta_m}{\lambda}$$

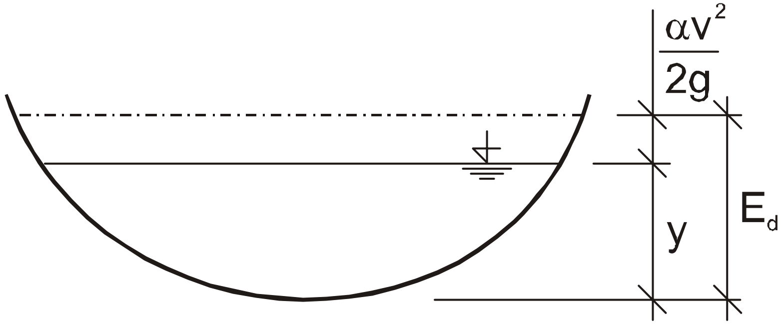
Celková ztráta v potrubí se potom počítá ze vztahu

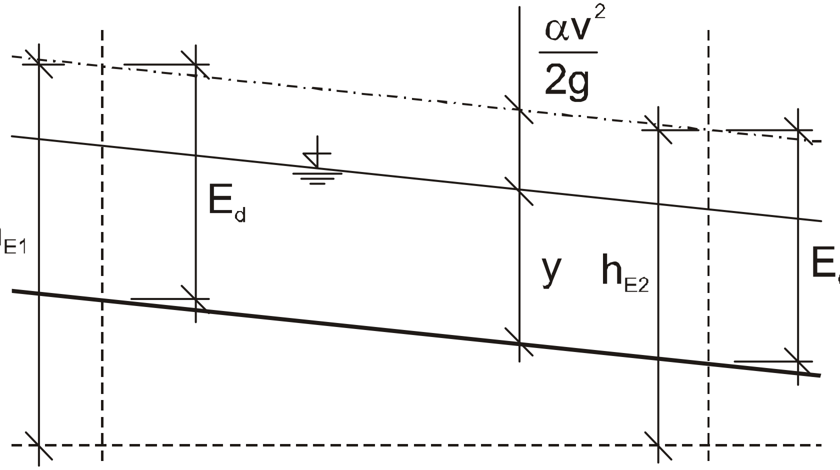
$$\sum Z = \lambda \frac{(L + L_n)}{D} \frac{v^2}{2g}$$

Proudění říční, kritické a bystřinné

Kritické proudění je důležitým případem ustáleného proudění v otevřených korytech. Svými charakteristikami umožňuje určit charakter proudění v korytě, což je nezbytné pro řadu úloh říční hydrauliky, zejména při stanovení průběhu hladin v korytech. Je-li vztažena mechanická energie proudu protékajícího korytem s volnou hladinou k úrovni nejnižšího bodu průřezu a je-li uvažována pro jednotku hmotnostního průtoku, získá se **energetická výška průřezu (měrná energie průřezu):**

$$E_d = y + \frac{\alpha v^2}{2g} = y + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2}$$



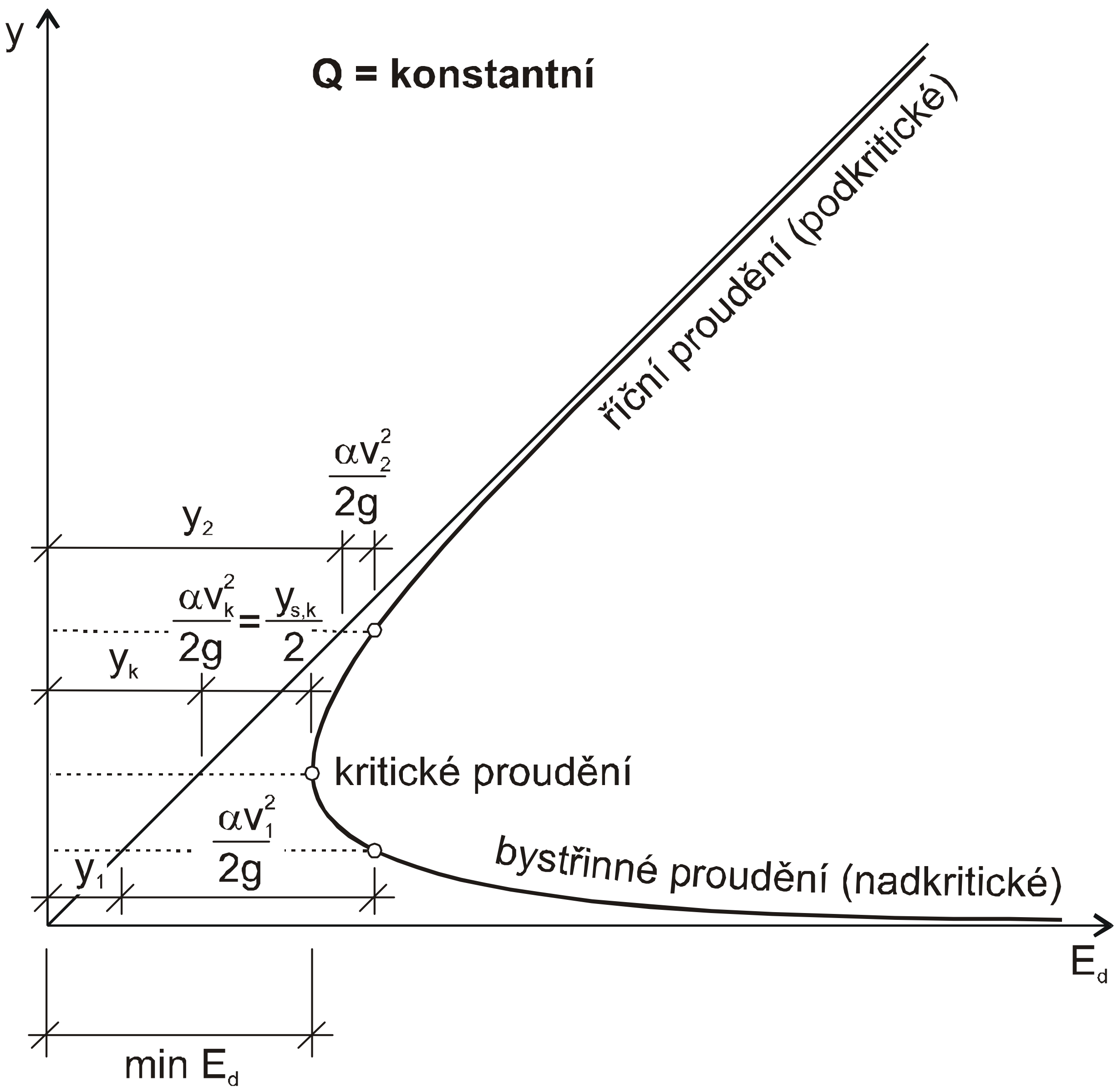


Zatímco energetická výška proudu h_E se směrem pohybu zmenšuje o ztráty, energetická výška průřezu E_d zůstává při rovnoměrném pohybu stálá. Znázorněním průběhu rovnice pro měrnou energii průřezu pro Q = konst. se získá vrchol křivky A, kterým je určen kritický pohyb.

Při kritickém proudění prochází průřezem daný průtok s vynaložením minima energie.

Pro uvažovaný průtok Q je tento extrém jednoznačně určen: nastává za kritické hloubky y_k, při kritickém průřezu S_k, sklonu i_k a průtok postupuje kritickou rychlostí v_k. Z vyřešení minima funkce dané rov. v níž S = f(y), vyplývá obecná podmínka kritického proudění:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{S_k^3}{B_k}$$



Dosazením za $Q = v_k S_k$ se získá zvláštní vlastnost kritického proudění:

$$\frac{\alpha v_k^{\;2}}{2g} = \frac{y_{s,k}}{2}$$

kde $y_s = S/B$ je střední hloubka průřezu. Z rovnice lze vyjádřit kritickou rychlost:

$$v_k = \sqrt{\frac{g}{\alpha} y_{s,k}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \frac{S_k}{B_k}}$$

a pomocí Chézyho rovnice také kritický sklon:

$$i_k = \frac{g}{\alpha C_k^2} \frac{S_k}{B_k R_k} = \frac{g}{\alpha C_k^2} \frac{O_k}{B_k}$$

Určení Corioliosova čísla α pro uváděné rovnice:

Přímé určení Coriolisova čísla α je možné pouze na základě změřeného rychlostního pole průřezu; v návrhových úlohách se musí využívat pouze teoretickoempirických postupů určení α. Při výpočtu pravidelných koryt, u kterých se průtočná plocha bud' vůbec, nebo téměř nemění, se často uvažuje α = 1,0 až 1,1. Podle výsledků měření je v nepravidelných korytech $\alpha \approx$ 1,3 až 1,8.

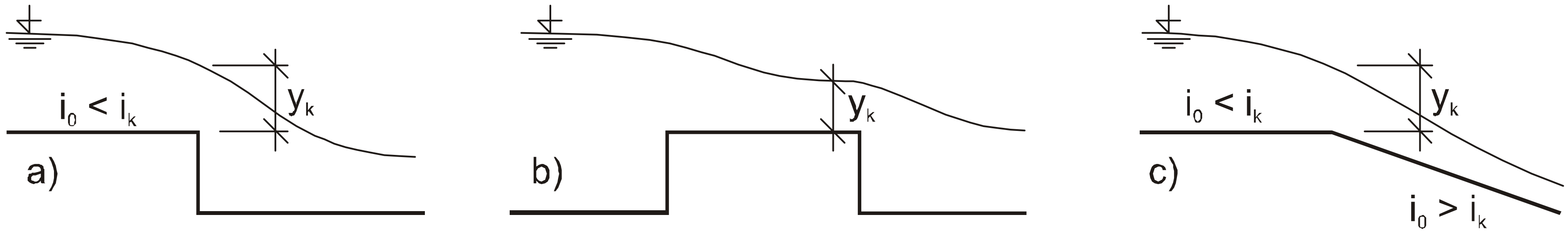
Někteří autoři se pokusili o vyjádření závislosti Coriolisova čísla α na rychlostním součiniteli C. Např. Morozov uvádí:

$$\alpha = 1{,}0 + 0{,}84\left(\frac{3{,}7}{C^{0{,}25}} - 1\right)^{1{,}8}$$

Podobnou závislost α na C uvádí Evreinov:

<table>
<tr><td>C</td><td>20</td><td>22</td><td>25</td><td>28</td><td>30</td><td>32</td><td>35</td><td>38</td><td>40</td><td>45</td><td>50</td></tr>
<tr><td>α</td><td>1,525</td><td>1,435</td><td>1,336</td><td>1,270</td><td>1,224</td><td>1,204</td><td>1,171</td><td>1,144</td><td>1,132</td><td>1,105</td><td>1,084</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="7">ohlast běžně používaných hodnot</td><td colspan="4">1,1</td></tr>
<tr><td>C</td><td>55</td><td>60</td><td>65</td><td>70</td><td>75</td><td>80</td><td>85</td><td>90</td><td>95</td><td>100</td><td>>100</td></tr>
<tr><td>α</td><td>1,069</td><td>1,057</td><td>1,051</td><td>1,045</td><td>1,039</td><td>1,033</td><td>1,030</td><td>1,027</td><td>1,024</td><td>1,021</td><td>1,020</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">1,05</td><td colspan="3">1,0</td></tr>
</table>

Výskyt kritické hloubkv y_k v korytě



Vznik kritické hloubky

a) stupeň ve dně, b) přepad přes širokou korunu, c) přechod z říčního pohybu do bystřinného zlomem sklonu

V kritických průřezech není průtočnost ovlivněna, dokud spodní hladina nepřekročí y_k - pak teprve nastává b v případech na obr. zatopený přepad.

Způsoby určení režimu proudění v otevřeném korytě

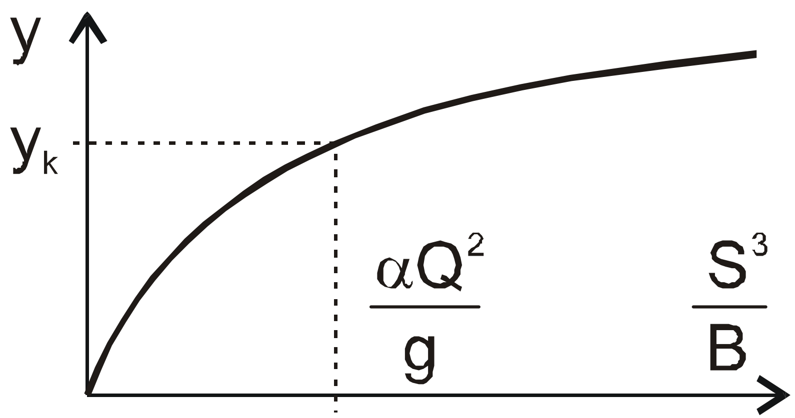
a) Porovnání hloubky rovnoměrného proudění y_0 s hloubkou kritickou y_k:

$y_0 > y_k$ - proudění je říční, $y_0 < y_k$ - proudění je bystřinné.

Určení kritické hloubky:

1) Výpočtem obecné podmínky kritického proudění - pro obdélníkový, trojúhelníkový a parabolický průřez: vyjádří se $S = f(y)$, $B = f(y)$ a řeší se $y = (y_k)$

2) Polografickou metodou - u průřezů, kde není možné řešit přímým výpočtem (především nepravidelné profily) se vynese funkce $y = f(S^3/B)$ a pro hodnotu $\alpha Q^2/g$ se najde odpovídající hodnota $y = y_k$ (obr. 7.2.4).



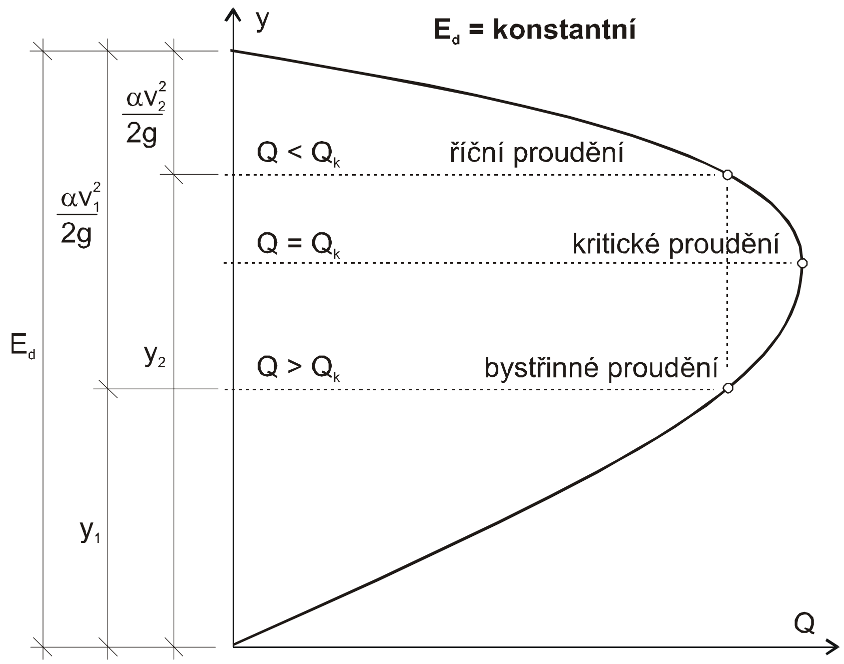
4) Vynesením průběhu funkce dané rovnicí

$$E_d = y + \frac{\alpha v^2}{2g} = y + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2}$$

5) Parabolou průtoku.

Parabola průtoku (Kochova křivka): kritické proudění lze vyjádřit též při stálé hodnotě měrné energie průřezu, tedy při E_d = konst. Z rovnice pro měrnou energii dostaneme vztah pro Q:

$$Q = S\sqrt{\frac{2g}{\alpha}(E_d - y)}$$



Parabola průtoku

b) Porovnání hodnoty Froudova čísla Fr s jeho mezní hodnotou pro kritické proudění.

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g y_s}}$$

kde y_s = S/B je střední hloubka průřezu

Při - kritickém proudění ($v = v_k$) je Fr = 1
- říčním proudění ($v < v_k$) je Fr < 1
- bystřinném proudění ($v > v_k$) je Fr > 1.