VÝTOK OTVOREM

Výtok kapaliny z nádoby může být:

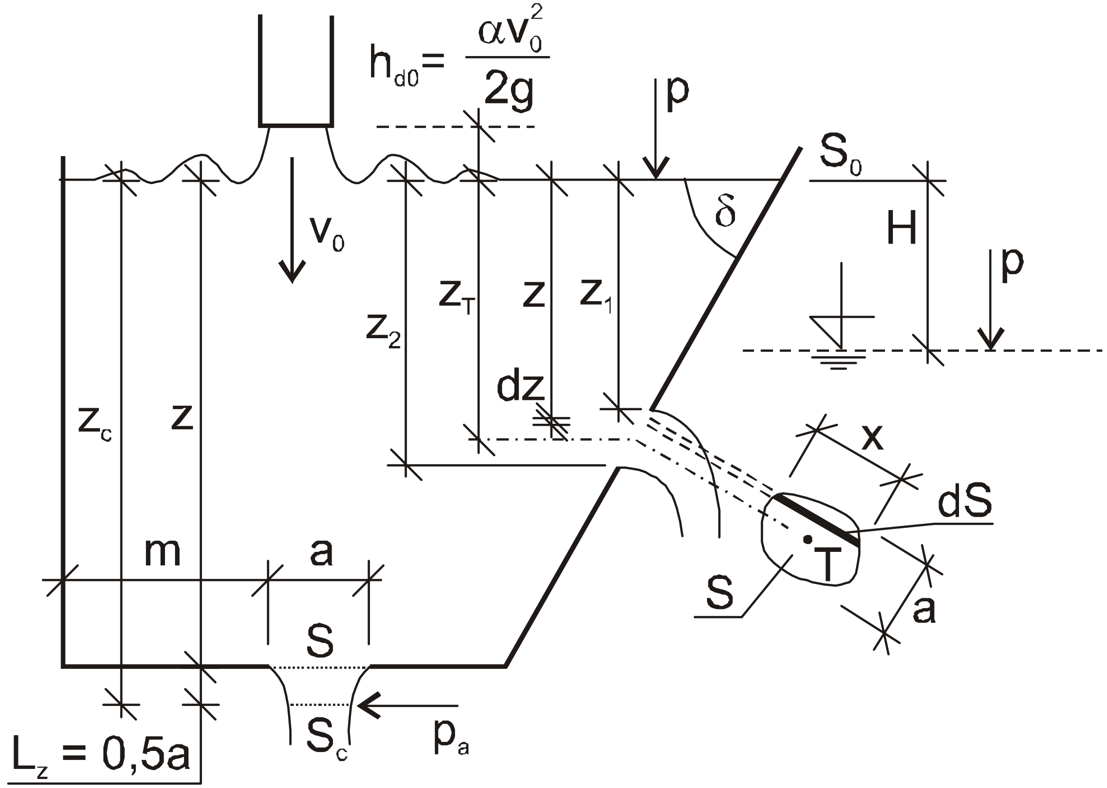
- ustálený
jeho charakteristiky, tj. výtoková rychlost a výtokové množství se s časem nemění. Přítok Q_p se rovná odtoku Q_o, hladina v nádrži zůstává na stejné úrovni,

- neustálený
výtoková rychlost a výtokové množství se s časem mění. Přítok $Q_p \neq Q_o$, hladina v nádrži stoupá nebo klesá - jde o plnění nebo prázdnění nádrže.

Ustálený výtok otvorem

Z hydraulického hlediska se rozlišuje výtok na:
- volný (nezatopený)
kapalina vytéká do volného prostoru a výtokové charakteristiky nejsou ovlivňovány kapalinou za otvorem;
- zatopený
kapalina vytéká pod hladinu,
- částečně zatopený
část výtokového otvoru je pod hladinou - kapalina vytéká současně do volného prostoru i pod hladinu.

VOLNÝ VÝTOK



Teoretickým základem pro určení charakteristik výtoku je Bernoulliho rovnice, kde např. pro výtok otvorem ve dně:

$$z_c + \frac{p}{\rho g} + h_{d0} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + Z \qquad \text{kde} \qquad Z = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

Úpravou rovnice se získá vztah pro výtokovou rychlost:

$$v = \varphi \sqrt{2g\left(z_c + \frac{p - p_a}{\rho g} + h_{d0}\right)} \qquad \text{kde} \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$$

kde φ je rychlostní součinitel

Průtok je

$$Q = \mu_v S \sqrt{2g\left(z_c + \frac{p - p_a}{\rho g} + h_{d0}\right)}$$

kde $\mu_v = \varphi\varepsilon$ je součinitel výtoku ve kterém $\varepsilon = S_c / S$ je součinitel zúžení (S_c - plocha zúženého průřezu).

Je-li nádoba otevřená, působí na volnou hladinu atmosférický tlak p_a a člen

$$\left(p - p_a\right)/\rho g = 0$$

Volný výtok velkým otvorem ve dně

$$Q = \mu_v S \sqrt{2g\left(z_c + \frac{p - p_a}{\rho g} + h_{d0}\right)}$$

Volný výtok malým otvorem ve dně

Otvor se považuje za malý, když platí $S_0/S > 4$, kde S_0 je plocha hladiny, S je plocha otvoru, a $z > 10a$. Zanedbávají se h_{d0} a L_z

$$v = \varphi\sqrt{2gz} \qquad Q = \mu_v S\sqrt{2gz}$$

Volný výtok malým otvorem ve stěně

Otvor se považuje za malý, když platí $z_1 > 10a$. K výpočtu se při volné hladině používají stejné rovnice, kde se místo z dosazuje z_T

$$v = \varphi\sqrt{2gz_T} \qquad Q = \mu_v S\sqrt{2gz_T}$$

Volný výtok velkým otvorem ve stěně (při volné hladině)

$$Q = \int_S dQ = \mu_v \frac{\sqrt{2g}}{\sin\delta} \int_{z_1}^{z_2} x\left(z + h_{d0}\right)^{\frac{1}{2}} dz$$

Pro integraci je třeba vyjádřit proměnnou šířku otvoru x jako funkci hloubky pod hladinou z (δ značí úhel odklonu roviny otvoru od vodorovné).

Obdélníkový otvor:

$$Q = \frac{2}{3}\mu_v \frac{b}{\sin\delta}\sqrt{2g}\left[\left(z_2 + h_{d0}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(z_1 + h_{do}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Kruhový otvor ve svislé stěně:

$$Q = \mu_v\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{z_T}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{z_T}\right)^4\right]\pi r^2\sqrt{2gz_T}$$

ZATOPENÝ VÝTOK (OTVOREM VE DNĚ I VE STĚNĚ)

Hladina dolní vody leží výše, než je horní hrana otvoru. Pro malé i velké otvory se použijí vztahy pro volný výtok, kde místo z, zc, z_T se dosadí spád H. Hodnoty součinitelů se uvažují zhruba tytéž, jako při výtoku volném.

ČÁSTEČNĚ ZATOPENÝ VÝTOK

Počítá se Q_1 pro část nad hladinou dolní vody z výrazů pro volný výtok a Q_2 pro část pod hladinou dolní vody z výrazů pro zatopený výtok. Celkový průtok: $Q = Q_1 + Q_2$

Hodnoty součinitelů

V kvadratické oblasti proudění se pro malé ostrohranné otvory při úplném a dokonalém zúžení používají následující průměrné hodnoty součinitelů:

rychlostní součinitel $\varphi = 0{,}97$

součinitel zúžení $\varepsilon = 0{,}6$ až 0,64

výtokový součinitel $\mu_v = 0{,}6$ až 0,62

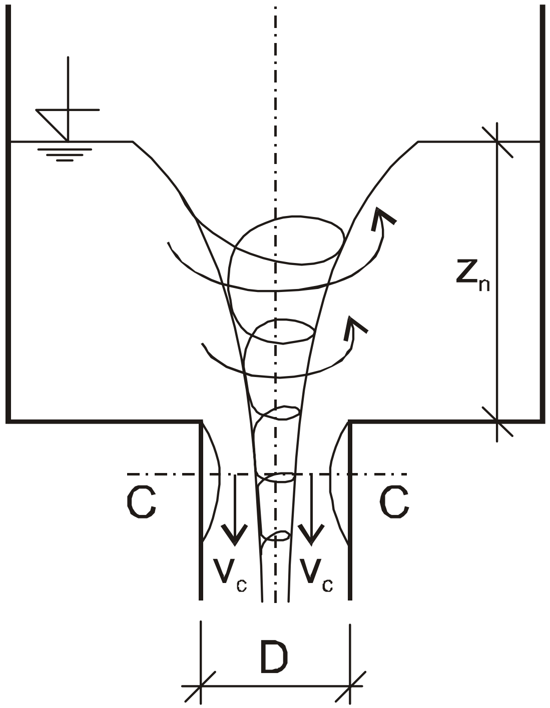
Hodnoty výtokových součinitelů Pro větší ostrohranné otvory

Typ otvoru	μ
velké otvory se zúžením ze všech stran	0,65
velké otvory s nedokonalým, ale všestranným zúžením	0,70
otvory u dna s podstatným bočním zúžením	0,65 - 0,70
otvory u dna s průměrným bočním zúžením	0,70 - 0,75
otvory u dna s plynulým usměrněním proudu z boků	0,80 - 0,85

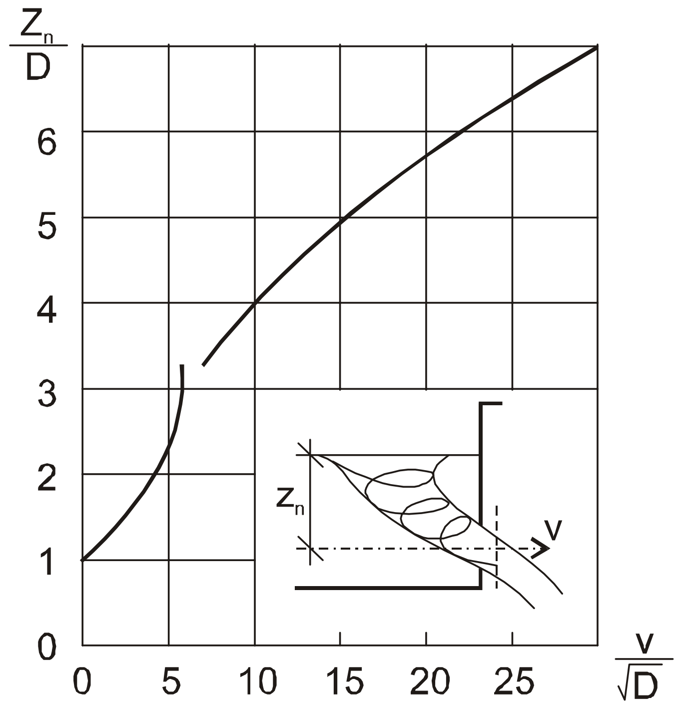
Vtokový vír

Při výtoku otvorem dochází při malých hloubkách kapaliny ke vzniku vírů - dochází k prohloubení hladiny spojené se strháváním vzduchu, což zmenšuje kapacitu výtokového otvoru. Podle Perelmana je pro kruhový otvor mezní hloubka, při níž pronikne duté jádro víru až do otvoru ve dně:

$$z_n = 0{,}5D\left(\frac{v_c}{\sqrt{gD}}\right)^{0{,}55} = 0{,}5D\left(\frac{Q}{\varepsilon S\sqrt{gD}}\right)^{0{,}55}$$



Určení mezní hloubky z_n pro otvor ve stěně je vhodnější pomocí grafu:



Neustálený výtok otvorem

Je charakterizován změnou objemu vody v nádrži, změnou hloubky, a tedy i změnou průtoku v čase Q = f(t). Pokud do nádoby přitéká Q_p, odtéká Q_0, a $Q_p > Q_0$, nádoba se:

- *plní* - když $Q_p > Q_0$
- *prázdní* - když $Q_p < Q_0$

Při řešení neustáleného výtoku je kromě okamžitého průtoku Q_0 důležité určit i čas, za který se určitá změna Q uskuteční. Počítá se:

- *doba t* - doba plnění (prázdnění), tj doba potřebná na naplnění (vyprázdnění) určitého objemu nádrže z úrovně z_1 do z_2;

- *doba T* - doba pro úplné naplnění (vyprázdnění kdy $z_2 = 0$). Změna polohy hladiny je omezena krajní polohou z_u:

$$z_u = \frac{Q^2}{\mu_v^2 S^2 2g}$$

při které

$$Q_p = Q_o = \mu_v S \sqrt{2gz_u}$$

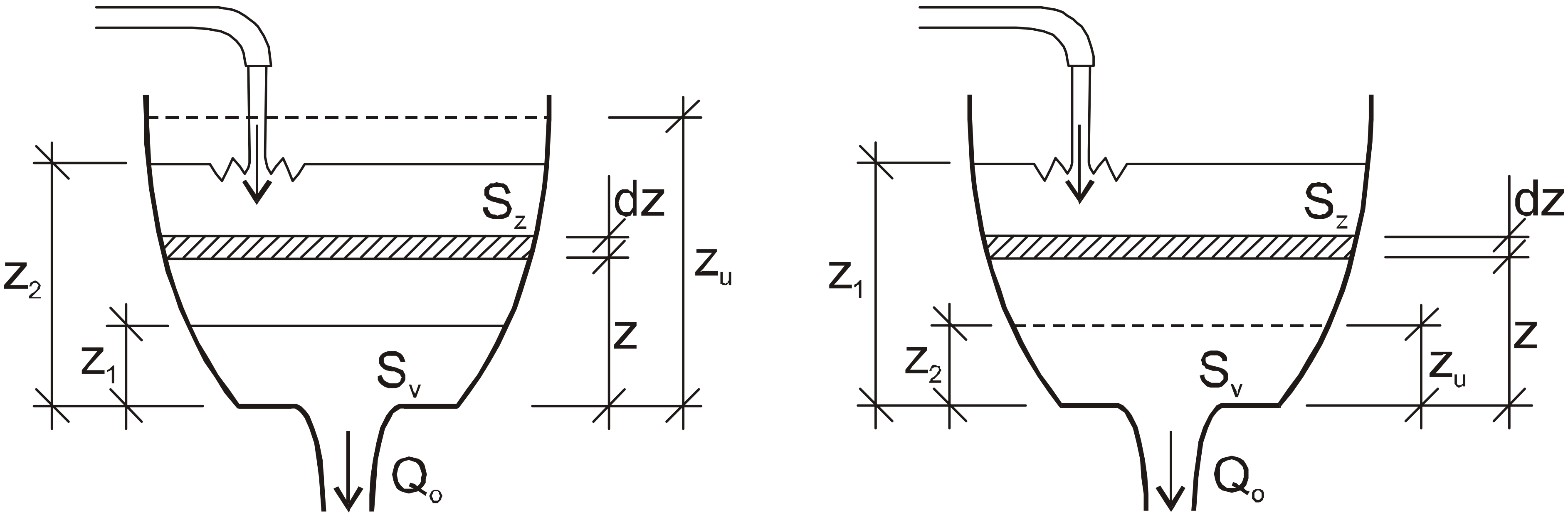
Plnění a prázdnění neprizmatické nádoby

Když $Q_p > Q_0$, nádoba se plní z úrovně z_1 do z_2. Za elementární dobu dt přiteče do nádoby objem kapaliny $Q_p dt$ a vyteče $Q_0 dt$. V nádobě se naplní prostor $S_z dz$, který se rovná rozdílu mezi přítokem a odtokem, což vyjadřuje *základní objemová rovnice* plnění (nebo prázdnění):

$$(Q_p - Q_0)dt = S_z dz$$

Když $Q_p < Q_0$, nádoba se prázdní z úrovně z_1 do z_2 a za elementární dobu dt se prostor $S_z dz$ vyprázdní.

Při prázdnění je $dz < 0$, neboť $Q_p - Q_0 < 0$, při plnění $dz > 0$, neboť $Q_p - Q_0 > 0$.



Protože

$$Q_o = \mu_v S_v \sqrt{2gz}$$

bude

$$dt = \frac{S_z dz}{Q_p - \mu_v S_v \sqrt{2gz}}$$

Doba plnění (prázdnění) se vypočte integrací:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{S_z dz}{Q_p - \mu_v S_v \sqrt{2gz}}$$

Analytické řešení je možné pouze, je-li Q_p = konst.
V rovnici je třeba vyjádřit:
- odtok Q_0 jako funkci proměnné polohy hladiny z (z rovnice pro výtok otvorem ve dně, ve stěně ...),
- přítok Q_p pomocí hloubky ustáleného pohybu z_u,
- plochu hladiny S_z jako funkci z.

Prázdnění a plnění prizmatické nádoby při Q_p = konst. a malém otvoru ve dně

Prizmatická nádoba - plocha vodorovného řezu S_z se nemění po výšce, S_z = konst. S použitím vztahů

$$Q_p = \mu_v S_v \sqrt{2gz_u} \qquad Q_0 = \mu_v S_v \sqrt{2gz}$$

S = konst. vychází řešením rovnice

$$\int_{t_1}^{t_2} d_t = t_2 - t_1 = t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{S_z dz}{Q_p - \mu_v S_v \sqrt{2gz}}$$

doba prázdnění (plnění):

$$t = \frac{2S_z}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} \left[\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - 2{,}3 \sqrt{z_u} \log \frac{\sqrt{z_u} - \sqrt{z_2}}{\sqrt{z_u} - \sqrt{z_1}} \right]$$

pro $Q_p = 0$:

$$t = \frac{2S_z}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} \left[\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \right]$$

Doba pro úplné vyprázdnění

$$\left(Q_p = 0,\ z_u = 0,\ z_2 = 0\right)$$

$$T = \frac{2S_z\sqrt{z_1}}{\mu_v S_v \sqrt{2g}}$$

Rozšířením zlomku $\sqrt{z_1}$ dostaneme:

$$T = \frac{2S_z z_1}{\mu_v S_v \sqrt{2gz_1}}$$

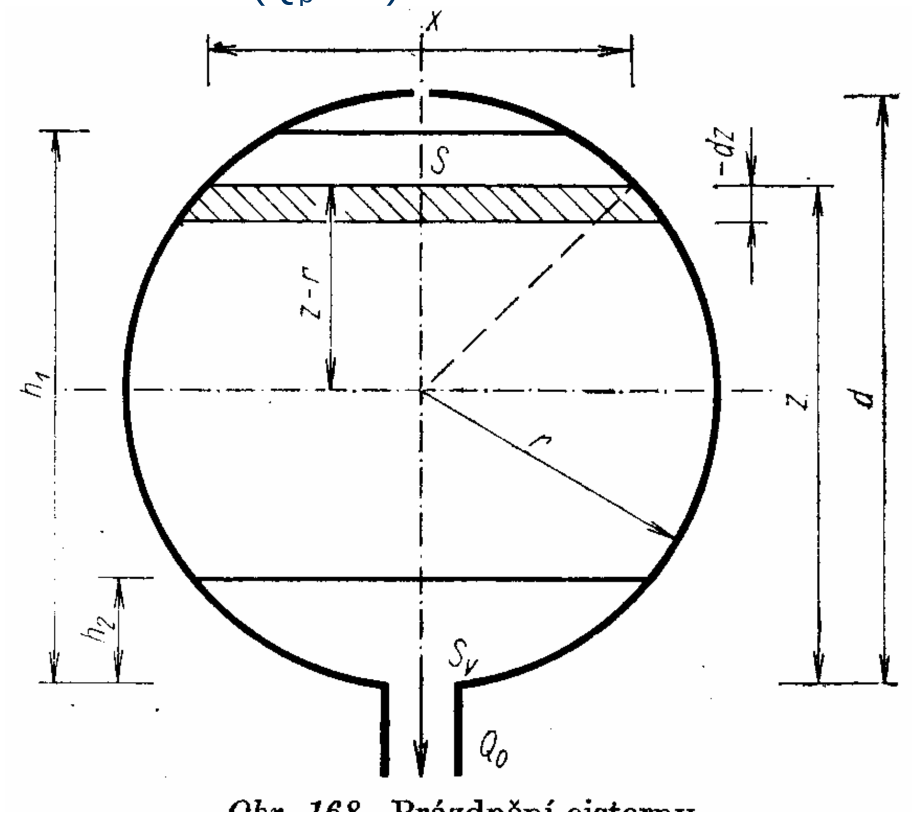
kde čitatel odpovídá dvojnásobnému počátečnímu objemu kapaliny v nádrži při hloubce z_1

$$T = 2\frac{V}{Q^+}$$

kde V je objem kapaliny v nádrži, Q^+ je ustálený výtok při hladině ve výšce z_1.

Prázdnění válcové cisterny s vodorovnou osou malým otvorem ve dně ($Q_p = 0$)

$$dt = -\frac{S_z dz}{\mu_v S_v \sqrt{2gz}}$$



Plocha hladiny je proměnlivá S=Lx, je-li L délka cisterny

$$x = 2\sqrt{r^2 - (z-r)^2} = 2\sqrt{z(2r-z)}$$

$$S_z = 2L\sqrt{z(2r-z)}$$

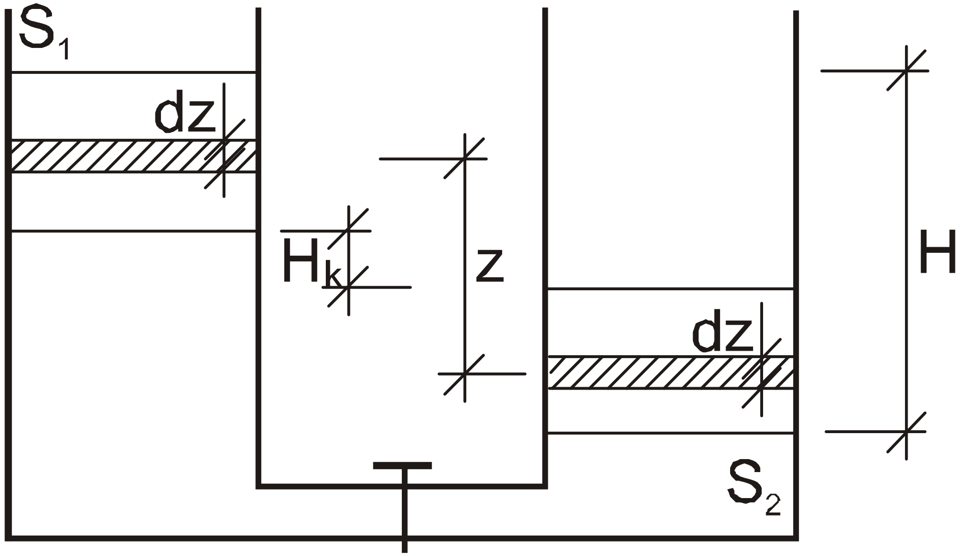
$$dt = -\frac{2L\sqrt{(2r-z)}}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} dz$$

$$t = \frac{4}{3}\frac{L}{\mu_v S_v \sqrt{2g}}\left[(d-h_2)^{\frac{3}{2}} - (d-h_1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Vyprázdnění celé cisterny $$T = \frac{4}{3}\frac{L d^{\frac{3}{2}}}{\mu_v S_v \sqrt{2g}}$$ kde L je délka a **d** je průměr cisterny.

Výtok z prizmatické nádoby pod proměnnou hladinou

Dvě prizmatické nádrže s půdorysnými plochami S_1 a S_2 jsou navzájem spojené potrubím, štolou, obtokem nebo otvorem s průřezovou plochou S. Počáteční spád v hladinách je H. Při okamžitém otevření uzávěru počáteční spád H změní na konečný spád H_k a za dobu dt vyteče objem



$$Qdt = \mu_v S_v \sqrt{2gz}\, dt$$

Do součinitele μ_v je potřeba zahrnout všechny ztráty:

$$\mu_v = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta}}$$

Za dobu dt se v levé části vyprázdní a v pravé části zaplní objem:

$$dV = S_1 dz_1 = S_2 dz_2$$

Rozdíl hladin se zmenší o:

$$dz = dz_1 + dz_2$$

Z rovnic

$$Qdt = \mu_v S_v \sqrt{2gz}\,dt \quad \text{a} \quad dV = S_1 dz_1 = S_2 dz_2$$

dostaneme

$$\mu_v S_v \sqrt{2gz}\,dt = -S_1 dz_1$$

$$dt = -\frac{S_1}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} z^{-\frac{1}{2}} dz_1$$

Z rovnic

$$dz = dz_1 + dz_2 \quad \text{a} \quad dV = S_1 dz_1 = S_2 dz_2$$

můžeme vyjádřit dz_1 pomocí dz

$$dz_1 = \frac{S_2}{S_1 + S_2} dz$$

Pro dt dostaneme:

$$dt = -\frac{S_1 S_2}{\mu_v S_v (S_1 + S_2)\sqrt{2g}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

Pro úplné vyrovnání hladin integrujeme v mezích od 0 do T a od H do 0:

$$T = -\frac{S_1 S_2}{\mu_v S_v (S_1 + S_2)\sqrt{2g}} \int_H^0 z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{S_1 S_2}{\mu_v S_v (S_1 + S_2)\sqrt{2g}} \int_0^H z^{-\frac{1}{2}} dz$$

Výsledkem je vztah pro úplné vyrovnání hladin:

$$T = \frac{2S_1S_2}{\mu_v S_v (S_1 + S_2)\sqrt{2g}}\sqrt{H}$$

Po vyrovnání hladin musí platit rovnost objemů

$$S_1 z_1 = S_2 z_2 \quad \text{přičemž} \quad z_2 = H - z_1$$

Pro dosažení určitého rozdílu H_k hladin zvolíme příslušné meze:

$$t = \frac{2S_1S_2}{S_1 + S_2}\,\frac{\sqrt{H} - \sqrt{H_k}}{\mu_v S_v \sqrt{2g}}$$

Jestliže vydělíme čitatele i jmenovatele v rovnici pro úplné vyrovnání hladin plochou S_2 dostaneme:

$$T = \frac{2S_1}{\mu_v S_v \left(\dfrac{S_1}{S_2} + 1\right)\sqrt{2g}}\sqrt{H}$$

V případě, že voda vytéká nádoby do velké zdrže pak S1/S2 $\rightarrow$ 0 a pak dostaneme:

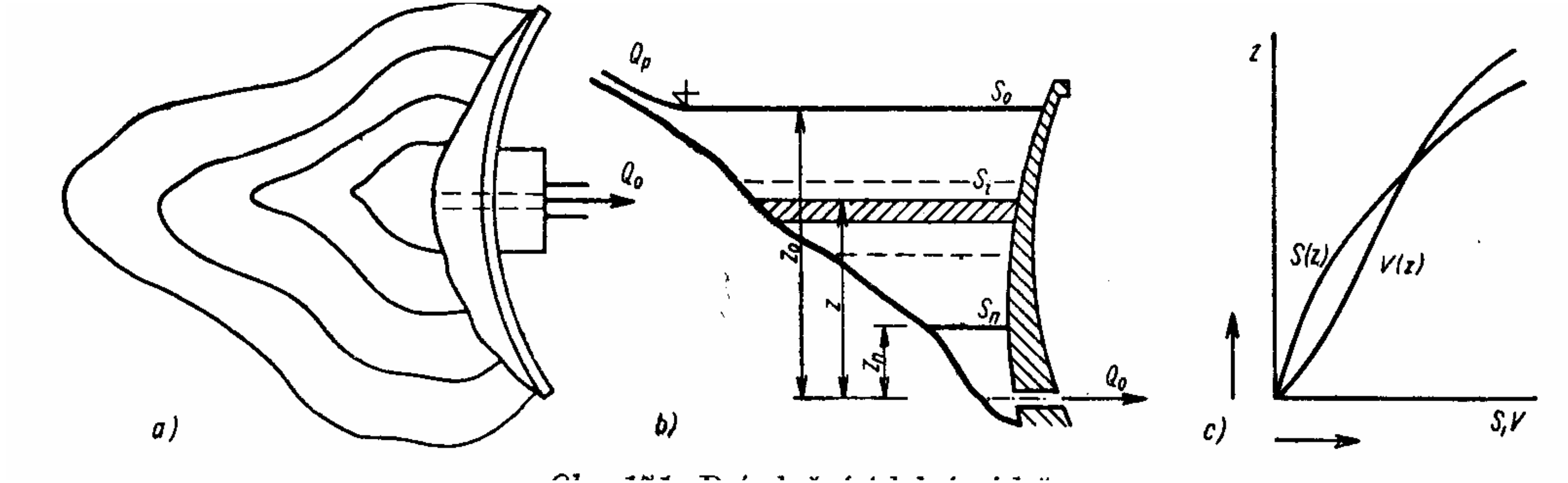
$$T = \frac{2S_1}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} \sqrt{H}$$

Využití u plavebních komor

Je-li $S_1 = S_2$:

$$T = S_1 \frac{\sqrt{H}}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} \qquad t = S_1 \frac{\sqrt{H} - \sqrt{H_k}}{\mu_v S_v \sqrt{2g}}$$

Prázdnění nepravidelných nádrží



Úloha se řeší přibližnou numerickou metodou. Integrál

$$t = \frac{1}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} \int_{z_n}^{z_0} \frac{S_i dz}{\sqrt{z}}$$

se vyčíslí Simpsonovým pravidlem:

$$\int_{z_n}^{z_0} y dz = \frac{z_0 - z_n}{3}\left[y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right) + y_n\right]$$

Pro náš případ je

$$y = \frac{S_i}{\sqrt{z}}$$

pak dostaneme

$$t = \frac{1}{\mu_v S_v \sqrt{2g}} \frac{z_0 - z_n}{3} \left[\frac{S_0}{\sqrt{z_0}} + 4\left(\frac{S_1}{\sqrt{z_1}} + \frac{S_3}{\sqrt{z_3}} + \ldots + \frac{S_{n-1}}{\sqrt{z_{n-1}}} \right) + 2\left(\frac{S_2}{\sqrt{z_2}} + \frac{S_4}{\sqrt{z_4}} + \ldots + \frac{S_{n-2}}{\sqrt{z_{n-2}}} \right) + \frac{S_n}{\sqrt{z_n}} \right]$$

Výraz představuje sumarizaci dob vyprázdnění n vrstev ohraničených plochami S; S_i; S_{i+1}. **Volí se sudý počet n.**