Algoritmické a numerické výpočty

1. a 2. cvičení

(vytvořeno 26. září 2020)

Logické spojky

- konjunkce: $a \wedge b$, $a \cdot b$, $a\&b$, ...
- disjunkce: $a \vee b$, $a + b$, $a|b$, ...
- implikace: $a \Rightarrow b$, $a \rightarrow b$, ...
- negace: a', $\neg a$, $\overline{a}$, ...
- ekvivalence: $a \Leftrightarrow b$, ...
- exkluzivní disjunkce: $a \veebar b$, $a \oplus b$, $a + b$, ...
- ...

Pravdivost výrokových formulí

Úloha 1. Zkonstruujte pravdivostní tabulku formule

$$\varphi \equiv (a \wedge b) \Rightarrow (\neg a \vee b).$$

Úloha 2. Zkonstruujte pravdivostní tabulku formule

$$\varphi \equiv (a \veebar b) \Leftrightarrow \neg(b \Rightarrow c).$$

Úloha 3. Zkonstruujte pravdivostní tabulku formule

$$\varphi \equiv \Big((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)\Big) \Rightarrow \Big((a \vee b) \Rightarrow c\Big)$$

Úloha 4. Zkonstruujte pravdivostní tabulku formule

$$\varphi \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge \neg(a \Rightarrow c)$$

Úloha 5. Zkonstruujte pravdivostní tabulku formule

$$\varphi \equiv (a \veebar b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow d)$$

Úloha 6.

1. Je každá tautologie splnitelná?
2. Je každá splnitelná formule tautologie?
3. Je formule, která není splnitelná, kontradikce?
4. Je formule, která není kontradikce, tautologie?

Pravdivost množiny výrokových formulí

Úloha 7. Určete, pro která ohodnocení je množina formulí Γ pravdivá:

$$\Gamma = \{a \vee b, b \Leftrightarrow c, \neg b\}.$$

Úloha 8. Určete, pro která ohodnocení je množina formulí Δ pravdivá:

$$\Delta = \{a \wedge b, b \Rightarrow c, \neg c\}.$$

Úloha 9. Zkonstruujte pravdivostní tabulky následujících formulí a určete, zda se jedná o tautologii, kontradikci, nebo splnitelnou formuli.

1. $\varphi_1 \equiv (a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$
2. $\varphi_2 \equiv (a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$
3. $\varphi_3 \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) \wedge \neg\Big(a \Rightarrow (b \wedge c)\Big)$
4. $\varphi_4 \equiv c \wedge \big(\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow d\big)$

Úloha 10. Určete, pro která ohodnocení je následující množina formulí pravdivá:

$$\Gamma = \big\{(a \veebar b) \Leftrightarrow d, \neg(c \Rightarrow b), (a \wedge b) \Rightarrow c\big\}$$

Tautologická ekvivalence

Úloha 11. Určete, zda je zadaná dvojice formulí tautologicky ekvivalentní a pro která ohodnocení se jejich pravdivost případně liší:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv (a \Rightarrow b) \vee c \\ \psi &\equiv a' \vee b \vee c \end{aligned}$$

Úloha 12. Určete, zda je zadaná dvojice formulí tautologicky ekvivalentní a pro která ohodnocení se jejich pravdivost případně liší:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv (a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c \\ \psi &\equiv (a \wedge b') \vee c. \end{aligned}$$

Úloha 13. Určete, zda je zadaná dvojice formulí tautologicky ekvivalentní a pro která ohodnocení se jejich pravdivost případně liší:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \big((a \Leftrightarrow c) \Rightarrow d\big)' \wedge b \\ \psi &\equiv (a' \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge d) \end{aligned}$$

Sémantický důsledek

Úloha 14. Zjistěte, zda je formule φ sémantickým důsledkem množiny Γ:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{a \vee c, a \Rightarrow b, b \veebar c\}, \\ \varphi &\equiv (a \wedge b) \veebar c. \end{aligned}$$

Úloha 15. Zjistěte, zda je formule ψ sémantickým důsledkem množiny Γ:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{a \vee c, a \Rightarrow b, b \veebar c\}, \\ \psi &\equiv c \Rightarrow (a \vee b). \end{aligned}$$

Úloha 16. O Karlovi víme následující.

- Pokud není stávka a je pondělí, je Karel v práci.
- Pokud je Karel v práci, nemá dobrou náladu.
- Karel má dobrou náladu.

Určete, který z následujících výroků vyplývá z našich znalostí o Karlovi.

1. Je stávka nebo není pondělí.
2. Karel není v práci.
3. Je stávka a Karel není v práci.
4. Není pondělí.

Úloha 17. Zjistěte, zda jsou formule φ a ψ sémantickými důsledky množiny Γ:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(a \veebar c) \Rightarrow b, b \Leftrightarrow c, a \vee b' \vee c'\}, \\ \varphi &\equiv (a \wedge b) \Leftrightarrow c, \\ \psi &\equiv (a \veebar b) \veebar c. \end{aligned}$$

Úloha 18. Zjistěte, zda jsou formule φ a ψ sémantickými důsledky množiny Γ:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(a \wedge b) \Rightarrow d, b \veebar d, b \Leftrightarrow c\}, \\ \varphi &\equiv (b \veebar c) \Rightarrow (a \wedge d), \\ \psi &\equiv a \vee b \vee c. \end{aligned}$$

Převod formule do disjunktivní normální formy

Základní tautologické ekvivalence

- $a'' \equiv a$ (involutivita negace)
- $a \wedge a \equiv a, \ \ a \vee a \equiv a$ (idempotence $\wedge$ a $\vee$)
- $a \wedge b \equiv b \wedge a, \ \ a \vee b \equiv b \vee a$ (komutativita $\wedge$ a $\vee$)
- $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c), \ \ (a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$ (asociativita $\wedge$ a $\vee$)
- $a \wedge 1 \equiv a, \ \ a \vee 0 \equiv a$ (1 a 0 jako neutrální prvky)
- $a \vee 1 \equiv 1, \ \ a \wedge 0 \equiv 0$ (1 a 0 jako absorpční prvky)
- $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (distributivita)
- $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distributivita)

- $(a \wedge b)' \equiv a' \vee b', \ \ (a \vee b)' \equiv a' \wedge b'$ (de Morganova pravidla)
- $a \wedge (b \vee a) \equiv a, \ \ a \vee (b \wedge a) \equiv a$ (absorpce)
- $a \Rightarrow b \equiv a' \vee b$ (definice $\Rightarrow$)
- $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ (definice $\Leftrightarrow$)
- $a \Leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$
- $a \veebar b \equiv (a \Leftrightarrow b)'$ (definice $\veebar$)
- $a \veebar b \equiv (a' \wedge b) \vee (a \wedge b')$

(Každou formuli lze převést na ekvivalentní formuli, která obsahuje pouze spojky $\wedge$, $\vee$ a $'$. Množina $\{\wedge, \vee, '\}$ tvoří tzv. úplný soubor spojek.*)*

Úloha 19. Formuli $(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c$ převeďte na ekvivalentní formuli, která obsahuje pouze spojky $\wedge$, $\vee$ a $'$.

Úloha 20. Formuli $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \veebar d)$ převeďte na ekvivalentní formuli, která obsahuje pouze spojky $\wedge$, $\vee$ a $'$.

Převod formule do DNF a KNF přes pravdivostní tabulku

- DNF ... disjunktivní normální forma *(disjunkce konjunkcí literálů)*
- KNF ... konjunktivní normální forma *(konjunkce disjunkcí literálů)*
- Pro větší přehlednost zápisu normálních forem zde budeme konjunkci značit jako součin, tj., místo $a \wedge b$ budeme psát $a \cdot b$ nebo jenom ab.
- Navíc, při zápisu budeme předpokládat prioritu konjunkce před disjunkcí a prioritu negace před konjunkcí i disjunkcí. Tedy $a \cdot b' \vee c$ znamená $(a \cdot (b')) \vee c$.

Úloha 21. Formuli $\varphi \equiv (a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c$ převeďte do DNF.

Úloha 22. Formuli $\varphi \equiv (a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c$ převeďte do KNF.

Úloha 23. Formuli $\varphi \equiv (a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \veebar d)$ převeďte do DNF.

Úloha 24. Formuli $\varphi \equiv (a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \veebar d)$ převeďte do KNF.

Úloha 25. Formuli $\varphi \equiv (a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (b \veebar c)$ převeďte do DNF a KNF.

Úloha 26. Formuli $\psi \equiv (a \vee b) \Rightarrow (c \wedge (d' \vee e))$ převeďte do DNF.

Úloha 27. Formuli $\chi \equiv (a \vee b) \Rightarrow [(c \vee d) \Rightarrow (e \wedge f)]$ převeďte do DNF.

Řešení (některých) úloh

Řešení 1.

a	b	$a \wedge b$	$\neg a$	$\neg a \vee b$	φ
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Řešení 2.

a	b	c	$a \veebar b$	$b \Rightarrow c$	$\neg(b \Rightarrow c)$	φ
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Řešení 3.

a	b	c	$a \Rightarrow c$	$b \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$	$a \vee b$	$(a \vee b) \Rightarrow c$	φ
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

(Toto je příklad tautologie. Pravá podformule je sémantickým důsledkem levé.)

Řešení 4.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$	$\neg(a \Rightarrow c)$	φ
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0

(Toto je příklad kontradikce.)

Řešení 5.

a	b	c	d	$a \veebar b$	$c \Rightarrow d$	φ
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

(Toto je příklad splnitelné formule, která není tautologie.)

Řešení 7.

a	b	c	$a \vee b$	$b \Leftrightarrow c$	$\neg b$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

Tato množina formulí je pravdivá při ohodnocení $(a, b, c) = (1, 0, 0)$. Jedná se o tzv. *splnitelnou* mnozinu formulí.

Řešení 8.

a	b	c	$a \wedge b$	$b \Rightarrow c$	$\neg c$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Tato mnozinu formulí není pravdivá při žádném svém ohodnocení. Jedná se o tzv. *spornou* mnozinu formulí.

Řešení 9.

1. splnitelná, tautologie
2. splnitelná, tautologie

3. není splnitelná, kontradikce
4. splnitelná, není to tautologie

Řešení 10. Tato množina formulí je pravdivá pro ohodnocení

- $(a, b, c, d) = (0, 0, 1, 0)$,
- $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0)$.

Řešení 11.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \vee c$	a'	$a' \vee b \vee c$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

Formule φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní, protože jsou pravdivé při stejných ohodnoceních (jejich pravdivost je stejná ve všech ohodnoceních). Píšeme $\varphi \equiv \psi$.

Řešení 12.

a	b	c	$a \Leftrightarrow b$	$(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c$	b'	$a \wedge b'$	$(a \wedge b') \vee c$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	$\underline{\mathbf{1}}$	0	0	$\underline{\mathbf{0}}$
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1

Formule φ a ψ nejsou tautologicky ekvivalentní, protože se jejich pravdivost liší v ohodnocení $(a, b, c) = (0, 1, 0)$. Píšeme $\varphi \not\equiv \psi$.

Řešení 13. Tyto dvě formule nejsou tautologicky ekvivalentní. Jejich pravdivosti se liší při ohodnoceních:

- $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 1)$,
- $(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 1)$,
- $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 0)$,
- $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$.

Řešení 14.

a	b	c	$a \vee c$	$a \Rightarrow b$	$b \veebar c$	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \veebar c$
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	0	$\underline{\mathbf{1}}$
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	1	$\underline{\mathbf{1}}$
1	1	1	1	1	0	1	0

Formule φ je sémantickým důsledkem množiny Γ, protože tato formule je pravdivá ve všech ohodnoceních, ve kterých je pravdivá množina Γ. Píšeme $\Gamma \models \varphi$.

Řešení 15.

a	b	c	$a \vee c$	$a \Rightarrow b$	$b \veebar c$	$a \vee b$	$c \Rightarrow (a \vee b)$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	0	$\underline{\mathbf{0}}$!
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	1	$\underline{\mathbf{1}}$
1	1	1	1	1	0	1	1

Formule ψ není sémantickým důsledkem množiny Γ, protože při ohodnocení $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ je Γ pravdivá, ale ψ ne. Píšeme $\Gamma \not\models \psi$

Řešení 16. Důsledkem je první a druhý výrok.

Řešení 17.

	a	b	c	d	$(a \veebar c) \Rightarrow b$	$b \Leftrightarrow c$	$a \vee b' \vee c'$	φ	ψ
$*$	0	0	0	0	1	1	1	1	0
$*$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
	0	0	1	0	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	0	1	0	1	1	1
	0	1	0	1	1	0	1	1	1
	0	1	1	0	1	1	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	0	0	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	0	1	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	1	0	1	0	0
	1	0	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	0	0	1	0	1	0	0
	1	1	0	1	1	0	1	0	0
$*$	1	1	1	0	1	1	1	1	1
$*$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\Gamma \models \varphi, \qquad \Gamma \not\models \psi$$

Řešení 18.

	a	b	c	d	$(a \wedge b) \Rightarrow d$	$b \veebar d$	$b \Leftrightarrow c$	φ	ψ
	0	0	0	0	1	0	1	1	0
$*$	0	0	0	1	1	1	1	1	**0 !**
	0	0	1	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	1	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	1	1	0	0	1
	0	1	0	1	1	0	0	0	1
$*$	0	1	1	0	1	1	1	1	1
	0	1	1	1	1	0	1	1	1
	1	0	0	0	1	0	1	1	1
$*$	1	0	0	1	1	1	1	1	1
	1	0	1	0	1	0	0	0	1
	1	0	1	1	1	1	0	1	1
	1	1	0	0	0	1	0	0	1
	1	1	0	1	1	0	0	1	1
	1	1	1	0	0	1	1	0	1
	1	1	1	1	1	0	1	1	1

$$\Gamma \models \varphi, \qquad \Gamma \not\models \psi$$

Řešení 19.

$$\begin{aligned}
(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c \quad &\equiv \quad \Big((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)\Big) \Rightarrow c \quad \equiv \quad \Big((a' \vee b) \wedge (b' \vee a)\Big)' \vee c \\
&\equiv \quad \Big((a' \vee b)' \vee (b' \vee a)'\Big) \vee c \quad \equiv \quad \Big((a' \wedge b) \vee (b' \wedge a)\Big) \vee c \\
&\equiv \quad (a' \wedge b) \vee (b' \wedge a) \vee c
\end{aligned}$$

Řešení 20.

$$\begin{aligned}
(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \veebar d) \quad &\equiv \quad (a \Rightarrow b)' \vee (c \veebar d) \\
&\equiv \quad (a' \vee b)' \vee \Big((c' \wedge d) \vee (c \wedge d')\Big) \\
&\equiv \quad (a \wedge b') \vee (c' \wedge d) \vee (c \wedge d')
\end{aligned}$$

Řešení 21.

a	b	c	$a \Leftrightarrow b$	$(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c$	term
0	0	0	1	0	
0	0	1	1	1	$a'\,b'\,c$
0	1	0	0	1	$a'\,b\,c'$
0	1	1	0	1	$a'\,b\,c$
1	0	0	0	1	$a\,b'\,c'$
1	0	1	0	1	$a\,b'\,c$
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	$a\,b\,c$

$$\varphi \quad \equiv \quad a'\,b'\,c \;\vee\; a'\,b\,c' \;\vee\; a'\,b\,c \;\vee\; a\,b'\,c' \;\vee\; a\,b'\,c \;\vee\; a\,b\,c$$

(Dostali jsme tzv. úplnou disjunktivní normální formu (ÚDNF)*. V každém termu se totiž vyskytují všechny logické proměnné.)*

Řešení 22.

a	b	c	$a \Leftrightarrow b$	$(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow c$	term
0	0	0	1	0	$a \vee b \vee c$
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	0	1	
1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	$a' \vee b' \vee c$
1	1	1	1	1	

$$\varphi \quad \equiv \quad (a \vee b \vee c) \cdot (a' \vee b' \vee c)$$

(Dostali jsme úplnou konjunktivní normální formu (ÚKNF).*)*

Řešení 23.

a	b	c	d	$a \Rightarrow b$	$c \veebar d$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \veebar d)$	term
0	0	0	0	1	0	0	
0	0	0	1	1	1	1	$a'\,b'\,c'\,d$
0	0	1	0	1	1	1	$a'\,b'\,c\,d'$
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	$a'\,b\,c'\,d$
0	1	1	0	1	1	1	$a'\,b\,c\,d'$
0	1	1	1	1	0	0	
1	0	0	0	0	0	1	$a\,b'\,c'\,d'$
1	0	0	1	0	1	1	$a\,b'\,c'\,d$
1	0	1	0	0	1	1	$a\,b'\,c\,d'$
1	0	1	1	0	0	1	$a\,b'\,c\,d$
1	1	0	0	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	1	$a\,b\,c'\,d$
1	1	1	0	1	1	1	$a\,b\,c\,d'$
1	1	1	1	1	0	0	

$$\begin{aligned}\varphi \quad \equiv \quad & a'\,b'\,c'\,d \;\vee\; a'\,b'\,c\,d' \;\vee\; a'\,b\,c'\,d \;\vee\; a'\,b\,c\,d' \;\vee\; a\,b'\,c'\,d' \\ \vee \quad & a\,b'\,c'\,d \;\vee\; a\,b'\,c\,d' \;\vee\; a\,b'\,c\,d \;\vee\; a\,b\,c'\,d \;\vee\; a\,b\,c\,d'\end{aligned}$$

Řešení 24.

a	b	c	d	$a \Rightarrow b$	$c \veebar d$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \veebar d)$	term
0	0	0	0	1	0	0	$a \vee b \vee c \vee d$
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	1	1	
0	0	1	1	1	0	0	$a \vee b \vee c' \vee d'$
0	1	0	0	1	0	0	$a \vee b' \vee c \vee d$
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	0	0	$a \vee b' \vee c' \vee d'$
1	0	0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	1	1	
1	0	1	1	0	0	1	
1	1	0	0	1	0	0	$a' \vee b' \vee c \vee d$
1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	0	0	$a' \vee b' \vee c' \vee d'$

$$\begin{aligned} \varphi \quad \equiv \quad & (a \vee b \vee c \vee d) \cdot (a \vee b \vee c' \vee d') \cdot (a \vee b' \vee c \vee d) \\ & \cdot (a \vee b' \vee c' \vee d') \cdot (a' \vee b' \vee c \vee d) \cdot (a' \vee b' \vee c' \vee d') \end{aligned}$$

Řešení 25.

$$\begin{aligned} \varphi \quad &\equiv \quad (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c), \\ \varphi \quad &\equiv \quad (a \vee b \vee c) \wedge (a' \vee b' \vee c'). \end{aligned}$$

Řešení 26.

$$\begin{aligned} \psi \quad &\equiv \quad (a \vee b) \Rightarrow (c \wedge (d' \vee e)) \\ &\equiv \quad (a \vee b)' \vee \Big((c \wedge d') \vee (c \wedge e)\Big) \\ &\equiv \quad (a' \wedge b') \vee (c \wedge d') \vee (c \wedge e) \end{aligned}$$

Řešení 27.

$$\begin{aligned} \chi \quad &\equiv \quad (a \vee b) \Rightarrow \Big((c \vee d) \Rightarrow (e \wedge f)\Big) \\ &\equiv \quad (a \vee b)' \vee \Big((c \vee d)' \vee (e \wedge f)\Big) \\ &\equiv \quad (a' \wedge b') \vee \Big((c' \wedge d') \vee (e \wedge f)\Big) \\ &\equiv \quad (a' \wedge b') \vee (c' \wedge d') \vee (e \wedge f) \end{aligned}$$