

Algoritmické a numerické výpočty

11. a 12. cvičení

(vytvořeno 26. září 2020)

Numerické řešení rovnic

- Rovnice musí být ve tvaru: $f(x) = 0$.
- Hledáme řešení na intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Podmínky řešitelnosti:
 - f je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
 - $\operatorname{sgn}f(a) \neq \operatorname{sgn}f(b)$.

Metoda půlení intervalu (bisection method)

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Metoda „Regula falsi“

$$c = \frac{af(b) - f(a)b}{f(b) - f(a)} = \frac{aB - Ab}{B - A}$$

Newtonova metoda tečen

- Další podmínky řešitelnosti:
 - Funkce f je mezi startovním bodem a kořenem pouze konkávní nebo pouze konvexní.
 - $\operatorname{sgn}f(a) = \operatorname{sgn}f''(a)$

$$c = a - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Úloha 1. Určete přibližně hodnotu $\sqrt{2}$.

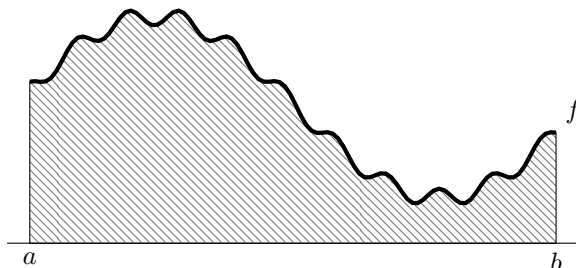
Úloha 2. Určete přibližně hodnotu $\sqrt{5}$.

Úloha 3. Určete přibližně hodnotu $\sqrt[3]{7}$.

Úloha 4. Určete přibližně kořen $x^3 + 4x^2 - 6x - 5$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

Úloha 5. Určete přibližně kořen $x^3 + x^2 - 8x - 6$ na intervalu $\langle 2, 3 \rangle$.

Numerický výpočet určitého integrálu

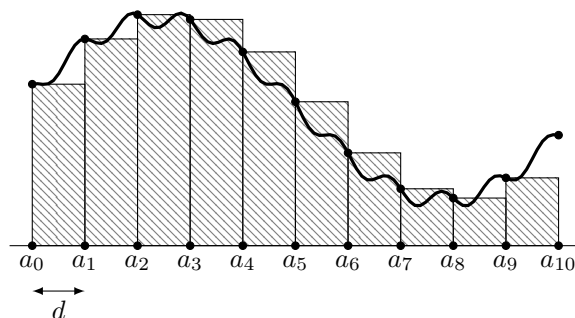


- určitý integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$:

$$\int_a^b f(x) dx$$

- *ekvidistantní dělení intervalu* ... vzniklé podintervaly mají všechny stejnou velikost

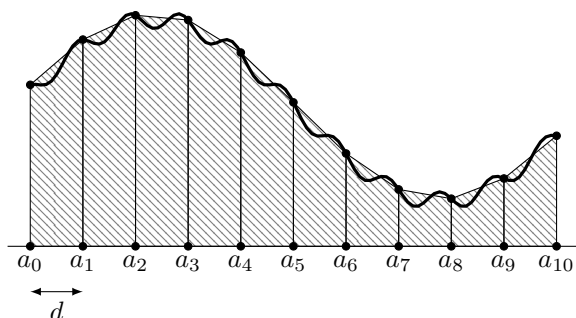
Obdélníková metoda



$$S_{\text{obd.}} = d \cdot \left(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + \mathbf{0} \cdot a_n \right)$$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
1	1	1	1	1	...	1	1	0

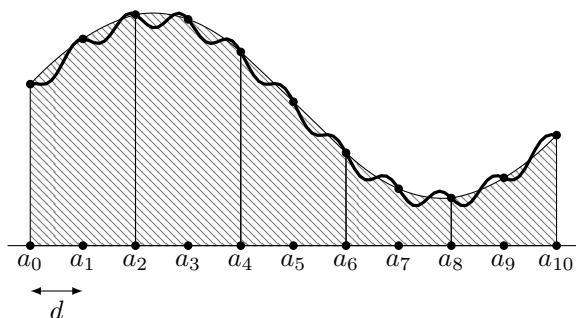
Lichoběžníková metoda



$$S_{\text{lich.}} = d \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot a_n \right)$$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	\dots	1	1	$\frac{1}{2}$

Simpsonova metoda



$$S_{\text{Sim.}} = d \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a_0 + \frac{4}{3} \cdot a_1 + \frac{2}{3} \cdot a_2 + \frac{4}{3} \cdot a_3 + \frac{2}{3} \cdot a_4 + \dots + \frac{2}{3} \cdot a_{n-2} + \frac{4}{3} \cdot a_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot a_n \right)$$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	\dots	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$

Úloha 6. Určete přibližnou hodnotu určitého integrálu

$$\int_1^3 \sqrt{x} \, dx$$

Úloha 7. Určete přibližnou hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^4 2^x \, dx.$$

Úloha 8. Určete přibližnou hodnotu určitého integrálu

$$\int_1^{11} \ln x \, dx$$

Řešení úloh

Řešení 1.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= x, \\ x^2 - 2 &= 0, \\ \langle a, b \rangle &= \langle 1, 2 \rangle \quad (\dots \text{nebo nějaký jiný interval}) \end{aligned}$$

1. Půlení intervalu:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	2.0000	1.5000	0.2500
1	1.0000	1.0000	1.5000	1.5000	1.2500	-0.4375
2	1.2500	-0.4375	1.5000	1.5000	1.3750	-0.1094
3	1.3750	-0.1094	1.5000	1.5000	1.4375	0.0664

2. Regula falsi:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	2.0000	1.3333	-0.2222
1	1.3333	-0.2222	2.0000	2.0000	1.4000	-0.0400
2	1.4000	-0.0400	2.0000	2.0000	1.4118	-0.0069
3	1.4118	-0.0069	2.0000	2.0000	1.4138	-0.0012

3. Newtonova metoda tečen:

	a	$f(a)$	$f'(a)$	c
0	2.0000	2.0000	4.0000	1.5000
1	1.5000	0.2500	3.0000	1.4167
2	1.4167	0.0069	2.8333	1.4142
3	1.4142	0.0000	2.8284	1.4142

4. $\sqrt{2} \doteq 1.414213562373095 \dots$

Řešení 2.

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= x, \\ x^2 - 5 &= 0, \\ \langle a, b \rangle &= \langle 2, 3 \rangle \quad (\dots \text{nebo nějaký jiný interval}) \end{aligned}$$

1. Půlení intervalu:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	2.0000	-1.0000	3.0000	4.0000	2.5000	1.2500
1	2.0000	2.0000	2.5000	2.5000	2.2500	0.0625
2	2.0000	2.0000	2.2500	2.2500	2.1250	-0.4844
3	2.1250	-0.4844	2.2500	2.2500	2.1875	-0.2148

2. Regula falsi:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	2.0000	-1.0000	3.0000	4.0000	2.2000	-0.1600
1	2.2000	-0.1600	3.0000	4.0000	2.2308	-0.0237
2	2.2308	-0.0237	3.0000	4.0000	2.2353	-0.0035
3	2.2353	-0.0035	3.0000	4.0000	2.2360	-0.0005

3. Newtonova metoda tečen:

	a	$f(a)$	$f'(a)$	c
0	3.0000	4.0000	6.0000	2.3333
1	2.3333	0.4444	4.6667	2.2381
2	2.2381	0.0091	4.4762	2.2361
3	2.2361	0.0000	4.4721	2.2361

4. $\sqrt{5} \doteq 2.236067977499790 \dots$

Řešení 3.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7} &= x, \\ x^3 - 7 &= 0, \\ \langle a, b \rangle &= \langle 1, 3 \rangle \quad (\dots \text{nebo nějaký jiný interval}) \end{aligned}$$

1. Půlení intervalu:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	1.0000	-4.0000	3.0000	4.0000	2.0000	-1.0000
1	2.0000	-1.0000	3.0000	4.0000	2.5000	1.2500
2	2.0000	2.0000	2.5000	2.5000	2.2500	0.0625
3	2.0000	2.0000	2.2500	2.2500	2.1250	-0.4844

2. Regula falsi:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	1.0000	-4.0000	3.0000	4.0000	2.0000	-1.0000
1	2.0000	-1.0000	3.0000	4.0000	2.2000	-0.1600
2	2.2000	-0.1600	3.0000	4.0000	2.2308	-0.0237
3	2.2308	-0.0237	3.0000	4.0000	2.2353	-0.0035

3. Newtonova metoda tečen:

	a	$f(a)$	$f'(a)$	c
0	3.0000	4.0000	6.0000	2.3333
1	2.3333	0.4444	4.6667	2.2381
2	2.2381	0.0091	4.4762	2.2361
3	2.2361	0.0000	4.4721	2.2361

4. $\sqrt[3]{7} \doteq 1.912931182772389 \dots$

Řešení 4.

1. Půlení intervalu:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	1.0000	-6.0000	2.0000	7.0000	1.5000	-1.6250
1	1.5000	-1.6250	2.0000	7.0000	1.7500	2.1094
2	1.5000	1.5000	1.7500	1.7500	1.6250	0.1035
3	1.5000	1.5000	1.6250	1.6250	1.5625	-0.7947

2. Regula falsi:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	1.0000	-6.0000	2.0000	7.0000	1.4615	-2.1029
1	1.4615	-2.1029	2.0000	7.0000	1.5859	-0.4660
2	1.5859	-0.4660	2.0000	7.0000	1.6118	-0.0923
3	1.6118	-0.0923	2.0000	7.0000	1.6168	-0.0179

3. Newtonova metoda tečen:

	a	$f(a)$	$f'(a)$	c
0	2.0000	7.0000	22.0000	1.6818
1	1.6818	0.9802	15.9401	1.6203
2	1.6203	0.0340	14.8390	1.6180
3	1.6180	0.0000	14.7984	1.6180

4. Podle vzorečku: $-5, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

5. Octave: $-5.00000, 1.61803, -0.61803$

Řešení 5.

1. Půlení intervalu:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	2.0000	-10.0000	3.0000	6.0000	2.5000	-4.1250
1	2.5000	-4.1250	3.0000	6.0000	2.7500	0.3594
2	2.5000	2.5000	2.7500	2.7500	2.6250	-2.0215
3	2.6250	-2.0215	2.7500	2.7500	2.6875	-0.8665

2. Regula falsi:

	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	2.0000	-10.0000	3.0000	6.0000	2.6250	-2.0215
1	2.6250	-2.0215	3.0000	6.0000	2.7195	-0.2477
2	2.7195	-0.2477	3.0000	6.0000	2.7306	-0.0283
3	2.7306	-0.0283	3.0000	6.0000	2.7319	-0.0032

3. Newtonova metoda tečen:

	a	$f(a)$	$f'(a)$	c
0	3.0000	6.0000	25.0000	2.7600
1	2.7600	0.5622	20.3728	2.7324
2	2.7324	0.0070	19.8629	2.7321
3	2.7321	0.0000	19.8564	2.7321

4. Reseni: $-3, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$

5. Octave: 2.73205, $-3.00000, -0.73205$

Řešení 6.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{x} \, dx &= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_1^3 = \frac{2}{3} (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{27} - 1) \doteq 2.797434948471088 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{x} \, dx &\doteq \frac{2}{4} \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} + 0 \cdot \sqrt{3} \right) \doteq 2.610 \\ &\doteq \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) \doteq 2.971 \\ &\doteq \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{1} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \right) \doteq 2.7973 \end{aligned}$$

Řešení 7.

$$\int_0^4 2^x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{4 \ln 2} e^t \, dt = \frac{2^4 - 1}{\ln 2} \doteq 21.640$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.000	0.400	0.800	1.200	1.600	2.000	2.400	2.800	3.200	3.600	4.000
$f(x_i)$	1.000	1.320	1.741	2.297	3.031	4.000	5.278	6.964	9.190	12.126	16.000

Skutečný: 21.640
 Obdélníkový: 25.179
 Lichoběžníkový: 21.779
 Simpsonův: 21.641

Řešení 8.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000	11.000
$f(x_i)$	0.000	0.693	1.099	1.386	1.609	1.792	1.946	2.079	2.197	2.303	2.398

Skutečný: 16.377
 Obdélníkový: 17.502
 Lichoběžníkový: 16.303
 Simpsonův: 16.371

Řešení ??.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.000	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	4.500	5.000
$f(x_i)$	1.000	3.000	1.000	0.333	1.000	1.400	1.000	0.714	1.000	1.222	1.000

Skutečný: 0.000
 Obdélníkový: 6.335
 Lichoběžníkový: 5.585
 Simpsonův: 5.947