

# Cvičení: Interpolace polynomem

13. března 2020

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle 0, 4 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	0	2	4
$f(x_i)$	1	11	45

**Řešení.**  $1 - x + 3x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & 16 & 45 \end{array} \right)$$

$$P(x) = 1 - x + 3x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)} \\ &+ 11 \cdot \frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)} \\ &+ 45 \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)} = 1 - x + 3x^2 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
0	1		
2	11	5	
4	45	17	3

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + 5x + 3x(x-2) \\ &= 1 - x + 3x^2 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle -1, 3 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	-1	1	3
$f(x_i)$	3	5	15

**Řešení.**  $3 + x + x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 15 \end{array} \right)$$

$$P(x) = 3 + x + x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= 3 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(-1-1)(-1-3)} \\
 &+ 5 \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(1+1)(1-3)} \\
 &+ 15 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(3+1)(3-1)} = 3 + x + x^2
 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
-1	3		
1	5	1	
3	15	5	1

$$\begin{aligned}
 N(x) &= 3 + 1(x+1) + 1(x+1)(x-1) \\
 &= 3 + x + x^2
 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle -1, 1 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	-1	0	1
$f(x_i)$	4	0	2

**Řešení.**  $-x + 3x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$P(x) = -x + 3x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= 4 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} \\
 &+ 0 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} \\
 &+ 2 \cdot \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = -x + 3x^2
 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
-1	4		
0	0	-4	
1	2	2	3

$$\begin{aligned}
 N(x) &= 4 - 4(x+1) + 3(x+1)x \\
 &= -x + 3x^2
 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle -1, 3 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	-1	1	3
$f(x_i)$	4	2	8

**Řešení.**  $2 - x + x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 8 \end{array} \right)$$

$$P(x) = 2 - x + x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned} L(x) &= 4 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(-1-1)(-1-3)} \\ &+ 2 \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(1+1)(1-3)} \\ &+ 8 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(3+1)(3-1)} = 2 - x + x^2 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
-1	4		
1	2	-1	
3	8	3	1

$$\begin{aligned} N(x) &= 4 - 1(x+1) + 1(x+1)(x-1) \\ &= 2 - x + x^2 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle 0, 4 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	0	2	4
$f(x_i)$	-4	2	16

**Řešení.**  $-4 + x + x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 16 \end{array} \right)$$

$$P(x) = -4 + x + x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned} L(x) &= -4 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)} \\ &+ 2 \cdot \frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)} \\ &+ 16 \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)} = -4 + x + x^2 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
0	-4		
2	2	3	
4	16	7	1

$$\begin{aligned} N(x) &= 4 + 3x + 1x(x-2) \\ &= -4 + x + x^2 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle 0, 4 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	0	2	4
$f(x_i)$	-1	7	31

**Řešení.**  $-1 + 2x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 16 & 31 \end{array} \right)$$

$$P(x) = -1 + 2x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned} L(x) &= -1 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)} \\ &+ 7 \cdot \frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)} \\ &+ 31 \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)} = -1 + 2x^2 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
0	-1		
2	7	4	
4	31	12	2

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + 4x + 2x(x-2) \\ &= -1 + 2x^2 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle -1, 1 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	-1	0	1
$f(x_i)$	7	4	3

**Řešení.**  $4 - 2x + x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$P(x) = 4 - 2x + x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= 7 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} \\
 &+ 4 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} \\
 &+ 3 \cdot \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = 4 - 2x + x^2
 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
-1	7		
0	4	-3	
1	3	-1	1

$$\begin{aligned}
 N(x) &= 7 - 3(x+1) + 1(x+1)x \\
 &= 4 - 2x + x^2
 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle 1, 3 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	1	2	3
$f(x_i)$	-2	-1	2

**Řešení.**  $-1 - 2x + x^2$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{array} \right)$$

$$P(x) = -1 - 2x + x^2$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= -2 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \\
 &+ -1 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \\
 &+ 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = -1 - 2x + x^2
 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$		
1	-2		
2	-1	1	
3	2	3	1

$$\begin{aligned}
 N(x) &= 2 + 1(x-1) + 1(x-1)(x-2) \\
 &= -1 - 2x + x^2
 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle -2, 2 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	3	0	1	0	-9

**Řešení.**  $1 + x - x^2 - x^3$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & -9 \end{array} \right)$$

$$P(x) = 1 + x - x^2 - x^3$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned} L(x) &= 3 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)(-2-2)} \\ &+ 0 \cdot \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)} \\ &+ 1 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} \\ &+ 0 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)} \\ &+ -9 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)} = 1 + x - x^2 - x^3 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$				
-2	3				
-1	0	-3			
0	1	1	2		
1	0	-1	-1	-1	
2	-9	-9	-4	-1	0

$$\begin{aligned} N(x) &= 3 - 3(x+2) + 2(x+2)(x+1) - 1(x+2)(x+1)x + 0(x+2)(x+1)x(x-1) \\ &= 1 + x - x^2 - x^3 \end{aligned}$$

**Úloha.** Sestrojte interpolační polynom pro funkci  $f$ , spojitou v  $\langle -2, 2 \rangle$ , zadanou následující tabulkou:

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-19	-2	-1	2	1

**Řešení.**  $-1 + x + 2x^2 + x^3 - x^4$

- přímý výpočet:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -19 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 1 \end{array} \right)$$

$$P(x) = -1 + x + 2x^2 + x^3 - x^4$$

- Langrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= -19 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)(-2-2)} \\
 &+ -2 \cdot \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)} \\
 &+ -1 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} \\
 &+ 2 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)} \\
 &+ 1 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)} = -1 + x + 2x^2 + x^3 - x^4
 \end{aligned}$$

- Newtonův interpolační polynom:

$x_i$	$f(x_i)$				
-2	-19				
-1	-2	17			
0	-1	1	-8		
1	2	3	1	3	
2	1	-1	-2	-1	-1

$$\begin{aligned}
 N(x) &= 19 + 17(x+2) - 8(x+2)(x+1) + 3(x+2)(x+1)x - 1(x+2)(x+1)x(x-1) \\
 &= -1 + x + 2x^2 + x^3 - x^4
 \end{aligned}$$