# Cvičení: Obyčejné diferenciální rovnice s okrajovou podmínkou: Metoda konečných diferencí

1. dubna 2020

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + \left(1 + x^2\right) u(x) = 1 - 2x; \quad x \in \langle 0, 2 \rangle\,; \quad u(0) = 0, \;\; u(2) = 0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}, \\ x_2 &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} -u_1'' + \left(1 + x_1^2\right) u_1 &= 1 - 2x_1 \\ -u_2'' + \left(1 + x_2^2\right) u_2 &= 1 - 2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{\frac{4}{9}} + \frac{13}{9} u_1 &= -\frac{1}{3} \\ -\frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{\frac{4}{9}} + \frac{25}{9} u_2 &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \frac{107}{18} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{9}{4} & \frac{131}{18} & -\frac{5}{3} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{8004}{49507} &\doteq& -0.162 \\ u_2 &= -\frac{13812}{49507} &\doteq& -0.279 \end{aligned}$$

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + 3u(x) = -1 - x^2; \quad x \in \langle 0, 3 \rangle\,; \quad u(0) = 0, \;\; u(3) = 0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2. \end{aligned}$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} -u_1'' + 3u_1 &= -1 - x_1^2 \\ -u_2'' + 3u_2 &= -1 - x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{1} + 3u_1 &= -2 \\ -\frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{1} + 3u_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{5}{8} &\doteq& -0.625 \\ u_2 &= -\frac{9}{8} &\doteq& -1.125 \end{aligned}$$

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + \left(x + x^2\right) u(x) = -x^2; \quad x \in \langle 0, 3\rangle\,; \quad u(0) = 0,\ \ u(3) = 0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2. \end{aligned}$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} -u_1'' + \left(x_1 + x_1^2\right) u_1 &= -x_1^2 \\ -u_2'' + \left(x_2 + x_2^2\right) u_2 &= -x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{1} + 2u_1 &= -1 \\ -\frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{1} + 6u_2 &= -4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{12}{31} &\doteq& -0.387 \\ u_2 &= -\frac{17}{31} &\doteq& -0.548 \end{aligned}$$

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + (1 + 2x)\, u(x) = x^2; \quad x \in \langle 0, 1\rangle\,; \quad u(0) = 0,\ \ u(1) = 0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}, \\ x_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} -u_1'' + (1 + 2x_1)\, u_1 &= x_1^2 \\ -u_2'' + (1 + 2x_2)\, u_2 &= x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{\frac{1}{9}} + \frac{5}{3}u_1 &= \frac{1}{9} \\ -\frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{\frac{1}{9}} + \frac{7}{3}u_2 &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} \frac{59}{3} & -9 & \frac{1}{9} \\ -9 & \frac{61}{3} & \frac{4}{9} \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{169}{8610} \doteq 0.02 \\
u_2 &= \frac{263}{8610} \doteq 0.031
\end{aligned}
$$

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + \left(1 + x^2\right) u(x) = x; \quad x \in \langle 0, 3 \rangle\,; \quad u(0) = 0,\; u(3) = 0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1, \\
x_2 &= 2.
\end{aligned}
$$

**Řešení.**

$$
\begin{aligned}
-u_1'' + \left(1 + x_1^2\right) u_1 &= x_1 \\
-u_2'' + \left(1 + x_2^2\right) u_2 &= x_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{1} + 2u_1 &= 1 \\
-\frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{1} + 5u_2 &= 2
\end{aligned}
$$

$$\left( \begin{array}{rr|r} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{array} \right)$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{3} \doteq 0.333 \\
u_2 &= \frac{1}{3} \doteq 0.333
\end{aligned}
$$

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + x^2 u(x) = 3; \quad x \in \langle 0, 1 \rangle\,; \quad u(0) = 0,\; u(1) = 0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}, \\
x_2 &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

**Řešení.**

$$
\begin{aligned}
-u_1'' + x_1^2 u_1 &= 3 \\
-u_2'' + x_2^2 u_2 &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{\frac{1}{9}} + \frac{1}{9} u_1 &= 3 \\
-\frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{\frac{1}{9}} + \frac{4}{9} u_2 &= 3
\end{aligned}
$$

$$\left( \begin{array}{rr|r} \frac{163}{9} & -9 & 3 \\ -9 & \frac{166}{9} & 3 \end{array} \right)$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{6669}{20497} \doteq 0.325 \\
u_2 &= \frac{6588}{20497} \doteq 0.321
\end{aligned}
$$

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + (2+2x)\,u(x) = 2x + x^2; \quad x \in \langle 0,1\rangle\,; \quad u(0)=0,\ \ u(1)=0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}, \\ x_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} -u_1'' + (2+2x_1)\,u_1 &= 2x_1 + x_1^2 \\ -u_2'' + (2+2x_2)\,u_2 &= 2x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{u_0+u_2-2u_1}{\frac{1}{9}} + \frac{8}{3}u_1 &= \frac{7}{9} \\ -\frac{u_1+u_3-2u_2}{\frac{1}{9}} + \frac{10}{3}u_2 &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{62}{3} & -9 & \frac{7}{9} \\ -9 & \frac{64}{3} & \frac{16}{9} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{880}{9717} \doteq 0.091 \\ u_2 &= \frac{1181}{9717} \doteq 0.122 \end{aligned}$$

**Úloha.** Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + \left(2x+x^2\right)u(x) = 3 + x^2; \quad x \in \langle 0,1\rangle\,; \quad u(0)=0,\ \ u(1)=0,$$

metodou sítí (konečných diferencí) v bodech

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}, \\ x_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} -u_1'' + \left(2x_1+x_1^2\right)u_1 &= 3 + x_1^2 \\ -u_2'' + \left(2x_2+x_2^2\right)u_2 &= 3 + x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{u_0+u_2-2u_1}{\frac{1}{9}} + \frac{7}{9}u_1 &= \frac{28}{9} \\ -\frac{u_1+u_3-2u_2}{\frac{1}{9}} + \frac{16}{9}u_2 &= \frac{31}{9} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{169}{9} & -9 & \frac{28}{9} \\ -9 & \frac{178}{9} & \frac{31}{9} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{7495}{23521} \doteq 0.319 \\ u_2 &= \frac{7507}{23521} \doteq 0.319 \end{aligned}$$