Cvičení: Metoda konečných diferencí pro parciální diferenciální rovnice s okrajovou podmínkou

14. dubna 2020

Poznámka. Symbol Δ označuje *Laplaceův diferenciální operátor*, který je pro reálnou funkci dvou proměnných $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dán předpisem:

$$\Delta u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Zápisy $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ zde zastupují parciální derivace funkce u podle x, resp. podle y.

Úloha. Řešte parciální diferenciální rovnici

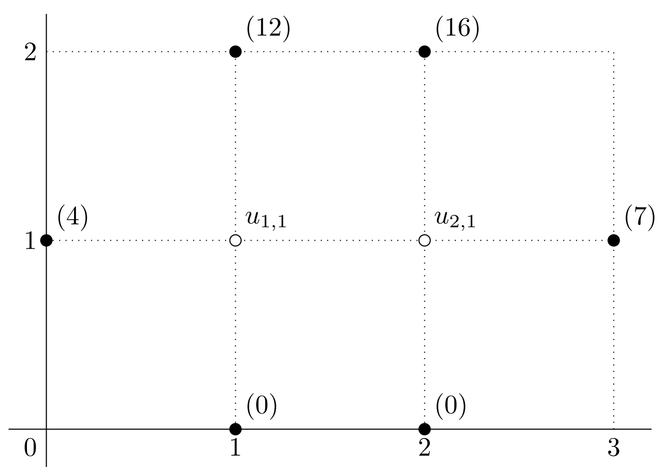
$$\Delta u(x,y) \;=\; x^2+5y \quad \text{na} \quad G=(0,3)\times(0,2)\,,$$

splňující okrajovou podmínku

$$u(x,y) \;=\; 4y+xy^2 \quad \text{na hranici oblasti } G,$$

metodou sítí (konečných diferencí) s volbou kroků $h_x=1$ (délka kroku ve směru osy x) a $h_y=1$ (délka kroku ve směru osy y).

Řešení. Podle počáteční podmínky spočítáme hodnoty řešení na hranici oblasti G (hodnoty v závorkách):



Diferenciální rovnice má tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; x^2+5y.$$

Sestavíme diferenční rovnice (pro každý bod $u_{1,1}$, $u_{2,1}$ nahradíme parciální derivace diferenčními podíly):

$$\begin{aligned}
u_{1,1}\colon \quad & \frac{4+u_{2,1}-2u_{1,1}}{1}+\frac{0+12-2u_{1,1}}{1} &=\; 6\\
u_{2,1}\colon \quad & \frac{u_{1,1}+7-2u_{2,1}}{1}+\frac{0+16-2u_{2,1}}{1} &=\; 9
\end{aligned}$$

Dostaneme soustavu linearních rovnic:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Řešením této soustavy jsou hledané aproximace hodnot funkce u:

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{18}{5} \doteq 3.6 \\ u_{2,2} &= \frac{22}{5} \doteq 4.4 \end{aligned}$$

Úloha. Řešte parciální diferenciální rovnici

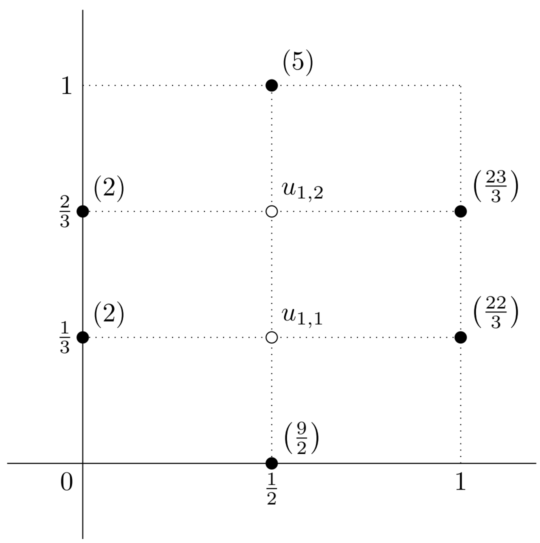
$$\Delta u(x,y) = 3 + 5xy \quad \text{na} \quad G = (0,1) \times (0,1)\,,$$

splňující okrajovou podmínku

$$u(x,y) = 2 + 5x + xy \quad \text{na hranici oblasti } G,$$

metodou sítí (konečných diferencí) s volbou kroků $h_x = \frac{1}{2}$ (délka kroku ve směru osy x) a $h_y = \frac{1}{3}$ (délka kroku ve směru osy y).

Řešení. Podle počáteční podmínky spočítáme hodnoty řešení na hranici oblasti G (hodnoty v závorkách):



Diferenciální rovnice má tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3 + 5xy.$$

Sestavíme diferenční rovnice (pro každý bod $u_{1,1}$, $u_{1,2}$ nahradíme parciální derivace diferenčními podíly):

$$\begin{aligned} u_{1,1}: \quad & \frac{2 + \frac{22}{3} - 2u_{1,1}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{9}{2} + u_{1,2} - 2u_{1,1}}{\frac{1}{9}} = \frac{23}{6} \\ u_{1,2}: \quad & \frac{2 + \frac{23}{3} - 2u_{1,2}}{\frac{1}{4}} + \frac{u_{1,1} + 5 - 2u_{1,2}}{\frac{1}{9}} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Dostaneme soustavu linearních rovnic:

$$\begin{pmatrix} -26 & 9 \\ 9 & -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -74 \\ -79 \end{pmatrix}$$

Řešením této soustavy jsou hledané aproximace hodnot funkce u:

$$
\begin{aligned}
u_{1,1} &= \frac{31}{7} \doteq 4.429 \\
u_{1,1} &= \frac{32}{7} \doteq 4.571
\end{aligned}
$$

Úloha. Řešte parciální diferenciální rovnici

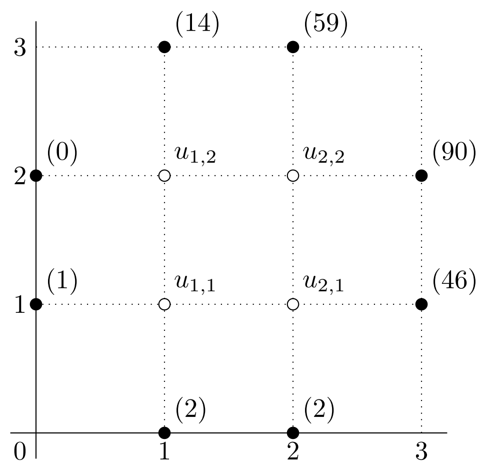
$$\Delta u(x,y) = 1 - 2x^2 + 3xy \quad \text{na} \quad G = (0,3) \times (0,3)\,,$$

splňující okrajovou podmínku

$$u(x,y) = 2 - y + 5x^2 y \quad \text{na hranici oblasti } G,$$

metodou sítí (konečných diferencí) s volbou kroků $h_x = 1$ (délka kroku ve směru osy x) a $h_y = 1$ (délka kroku ve směru osy y).

Řešení. Podle počáteční podmínky spočítáme hodnoty řešení na hranici oblasti G (hodnoty v závorkách):



Diferenciální rovnice má tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 - 2x^2 + 3xy.$$

Sestavíme diferenční rovnice (pro každý bod $u_{1,1}$, $u_{1,2}$, $u_{2,1}$, $u_{2,2}$ nahradíme parciální derivace diferenčními podíly):

$$
\begin{aligned}
u_{1,1}\colon \quad & \frac{1 + u_{2,1} - 2u_{1,1}}{1} + \frac{2 + u_{1,2} - 2u_{1,1}}{1} &= 2 \\
u_{1,2}\colon \quad & \frac{0 + u_{2,2} - 2u_{1,2}}{1} + \frac{u_{1,1} + 14 - 2u_{1,2}}{1} &= 5 \\
u_{2,1}\colon \quad & \frac{u_{1,1} + 46 - 2u_{2,1}}{1} + \frac{2 + u_{2,2} - 2u_{2,1}}{1} &= -1 \\
u_{2,2}\colon \quad & \frac{u_{1,2} + 90 - 2u_{2,2}}{1} + \frac{u_{2,1} + 59 - 2u_{2,2}}{1} &= 5
\end{aligned}
$$

Dostaneme soustavu linearních rovnic:

$$
\begin{pmatrix}
-4 & 1 & 1 & 0 \\
1 & -4 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -4 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -4
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
u_{1,1} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,2}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-1 \\ -9 \\ -49 \\ -144
\end{pmatrix}
$$

Řešením této soustavy jsou hledané aproximace hodnot funkce u:

$$\begin{aligned}
u_{1,1} &= \frac{89}{8} \doteq 11.125 \\
u_{1,1} &= \frac{67}{4} \doteq 16.75 \\
u_{2,2} &= \frac{107}{4} \doteq 26.75 \\
u_{2,2} &= \frac{375}{8} \doteq 46.875
\end{aligned}$$