Úvod do teorie grafů

Jan Hora

Česká zemědělská univerzita

27. září 2016

Graf není graf funkce

- Definice

  Neorientovaný graf G je trojice $G = (V, E, p)$, kde V je neprázdná (konečná) množina, jejíž prvky budeme nazývat vrcholy, E je (konečná) množina hran a p je zobrazení, které každé hraně přiřazuje jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinu vrcholů, čili $p : E \to \{\{a, b\} | a, b \in V\}$, určující, které vrcholy daná hrana spojuje.

- Definice

  Hrany začínající a končící ve stejném vrcholu ($p(e)$ je jednoprvková) nazýváme smyčky.

- Definice

  Graf, ve kterém existují různé hrany e_1 a e_2, pro které platí $p(e_1) = p(e_2)$ (tvz. vícenásobné hrany), se nazývá multigraf.

Diagram grafu

- Příklad
  $G = (V, E, p)$,
  $V = \{a, b, c, d\}$,
  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,
  $p(e_1) = \{a, b\}, p(e_2) = \{a, c\}, p(e_3) = \{a, d\}$,
  $p(e_4) = \{b, c\}, p(e_5) = \{b, d\}, p(e_6) = \{c, d\}$.
- Definice
  Konkrétní zobrazení grafu (obrázek na papíře) se nazývá diagram grafu.

Základní pojmy

- Definice

  Graf (V', E', p') *se nazývá* *podgraf* *grafu* (V, E, p), *pokud* $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ *a* $p(e) = p'(e)$ *pro každou hranu* $e \in E'$.

- Definice

  Stupeň vrcholu a (značíme $deg(a)$*) je počet hran, které z a vycházejí, čili* $deg(a) = |\{e \in E | a \in p(e)\}|$.

- Věta

  Součet stupňů všech vrcholů libovolného grafu je sudý.

Cesta nebo tah

- Definice
  Posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$ se nazývá sled, pokud $p(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Délkou tohoto sledu rozumíme číslo n.
- Definice
  Sled, ve kterém se neopakují hrany, nazýváme tah. V případě, že $v_0 = v_n$, nazýváme tento tah uzavřený, v opačném případě otevřený.
- Definice
  Sled, ve kterém se neopakují vrcholy (s možnou výjimkou prvního a posledního), nazýváme cesta. Uzavřená cesta se nazývá kružnice.

Problém popeláře

- Definice
  Graf se nazývá souvislý, pokud jsou každé dva vrcholy spojené cestou (tahem, sledem). Maximální souvislé části (nesouvislého) grafu se nazývají komponenty.
- Definice
  Graf se nazývá Eulerovský, pokud v něm existuje (uzavřený či otevřený) tah, který obsahuje každou hranu právě jednou. Nazývá se (uzavřený či otevřený) Eulerovský tah.
- Poznámka
  Eulerovský graf musí být souvislý.

Domeček s křížem jedním tahem

- Věta

  Souvislý graf obsahuje uzavřený Eulerovský tah právě tehdy, když je stupeň všech vrcholů sudý. Pak každý Eulerovský tah končí ve stejném vrcholu jako začíná.

- Věta

  Souvislý graf obsahuje otevřený Eulerovský tah právě tehdy, když mají právě dva vrcholy lichý stupeň. Tyto vrcholy jsou pak počáteční a koncový vrchol každého Eulerovského tahu.

Problém obchodního cestujícího

- Definice
  Graf se nazývá Hamiltonovský, pokud v něm existuje kružnice, která obsahuje každý vrchol (právě jednou). Taková kružnice se nazývá Hamiltonovská.
- Věta
  Buď G graf s n vrcholy. Pokud je stupeň každého vrcholu alespoň $n/2$, pak je daný graf Hamiltonovský.

Strom je les

- Definice
  Graf se nazývá les, pokud neobsahuje žádnou kružnici.
- Definice
  Graf se nazývá strom, pokud neobsahuje žádnou kružnici a je souvislý.
- Věta
  Souvislý graf o n vrcholech je strom právě tehdy, když má $n-1$ hran.
- Důsledek
  Graf o n vrcholech s méně než $n-1$ hranami je nesouvislý.

Kostra je strom

- Definice
  Podgraf obsahující všechny vrcholy původního grafu G se nazývá faktor grafu G.

- Definice
  Faktor (souvislého) grafu G, který je zároveň stromem, se nazývá kostra grafu G.

Ohodnocené grafy

- Definice
  Ohodnocený graf G *je čtveřice* $G = (V, E, p, c)$, *kde* (V, E, p) *je graf a* $c : E \to \mathbf{R}$ $(\mathbf{R}^+)$ *je zobrazení, které každé hraně přiřazuje (kladné) reálné číslo, nazývající se ohodnocení dané hrany.*
- Definice
  Minimální kostra souvislého ohodnoceného grafu G *je taková kostra, že součet ohodnocení jejích hran je minimální mezi všemi kostrami grafu* G.
- Definice
  Délkou cesty rozumíme součet ohodnocení jejích hran.
- Definice
  Vzdálenost dvou vrcholů je délka nejkratší cesty mezi těmito vrcholy.

Orientované grafy

- Definice
  Orientovaný graf G je trojice $G = (V, E, p)$, kde V je neprázdná (konečná) množina vrcholů, E je (konečná) množina hran a p je zobrazení, které každé hraně přiřazuje uspořádanou dvojici vrcholů, čili $p : E \to \{(a, b)|a, b \in V\}$. Vrchol a nazýváme počáteční vrchol hrany, b koncový.

- Značení
  Počet hran, které začínají ve vrcholu a, značíme $deg^+(a)$ a počet hran, které v a končí, $deg^-(a)$.

- Věta
  Orientovaný graf obsahuje uzavřený Eulerovský tah právě tehdy, když pro každý jeho vrchol a platí $deg^+(a) = deg^-(a)$.

Sítě

- Definice

  Orientovaný nezáporně ohodnocený souvislý graf bez smyček a násobných hran se nazývá síť, pokud jsou určeny vrcholy s a t, $s \neq t$ splňující $deg^{-}(s) = deg^{+}(t) = 0$. Vrchol s se nazývá zdroj, vrchol t stok (spotřebič). Ohodnocení $c(e)$ hrany e se nazývá kapacita této hrany.

- Značení

  Množinu hran začínajících ve vrcholu v značíme $H^{+}(v)$, podobně $H^{-}(v)$ označuje množinu hran ve v končících.

Toky v sítích

- Definice

  Tokem v síti rozumíme ohodnocení hran f splňující

  1. $0 \leq f(e) \leq c(e)$ *pro každou hranu* e,
  2. $$\sum_{e \in H^-(v)} f(e) = \sum_{e \in H^+(v)} f(e)$$

     (Kirchhoffův zákon) pro každý vrchol $v \neq s, t$.

- Definice

  Velikostí toku f rozumíme číslo

  $$|f| = \sum_{e \in H^+(s)} f(e) = \sum_{e \in H^-(t)} f(e).$$

Kdo nedělá na projektu, jako by nebyl

Definice

Síť se nazývá projekt, pokud splňuje následující podmínky

- *Neobsahuje žádný orientovaný cyklus.*
- *Každý vrchol leží alespoň na jedné orientované cestě z s do t.*

Definice

Kritická cesta projektu je každá orientovaná cesta z s do t, jejíž délka je maximální mezi všemi takovými cestami. Vrchol, který leží na alespoň jedné kritické cestě, se nazývá kritický vrchol.

Barvení grafu

Definice

k-obarvením grafu $G = (V, E, p)$ nazveme každé zobrazení $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, které každým dvěma vrcholům v, w spojeným hranou přiřazuje různé hodnoty $c(v) \neq c(w)$.

Definice

Chromatickým číslem grafu G (značí se obvykle $\chi(G)$) nazveme minimální přirozené číslo k takové, že existuje k-obarvení G.

Námořníci, rozvrh, křižovatky

Příklad

Určete chromatické číslo grafu

- D_n,
- K_n,
- C_5,
- C_6.
- T, T *je strom.*

Věta

Pro každý rovinný graf G *platí* $\chi(G) \leq 4$.

Jedenáct rozmazlených chlapečků

Příklad

Na druhý ročník velmi drahého lyžařského výcviku jede jedenáct chlapečků. Každý z nich nechce spát na pokoji s několika jinými malými lyžaři. Adam nechce spát s Bořík em, Martínkem a Fanouškem, Bořík s Karlíkem, Cyrilem a Pavlíkem, Cyril s Davídkem a Zdeňkem, Davídek s Adamem, Lukáškem a Martínkem, Fanoušek s Viktorem, Adamem a Boříkem, Karlík s Boříkem a Pavlíkem, Lukášek s Cyrilem, Viktorem a Davídkem, Martínek s Karlíkem, Pavlík s Viktorem a Lukáškem, Viktor s Fanouškem a Zdeňkem a Zdeněk s Adamem.
Určete, kolik pokojů budou hodní instruktoři potřebovat, aby splnili požadavky všech chlapečků (maminek)?