Některé pojmy z lineární algebry

5. března 2020

Tento text pojímejte, prosím, pouze jako výpisky ze skript:
Petr Olšák: Úvod do algebry, zejména lineární, ČVUT, Fakulta elektrotechnická.
Pro přesné znění definic a pro důkazy uvedených tvrzení vás odkazuji na tato skripta.

1 Lineární prostor

- *Reálný lineární prostor* je neprázdná množina L, na které jsou definovány operace:
  - *sčítání vektorů* ... $\oplus\colon L \times L \to L$,
  - *násobení vektoru skalárem* ... $\odot\colon \mathbb{R} \times L \to L$,

  které splňují, pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vlastnosti:
  1. $\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$,
  2. $(\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z})$,
  3. $\alpha \odot (\beta \odot \vec{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x}$,
  4. $\alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = (\alpha \odot \vec{x}) \oplus (\alpha \odot \vec{y})$,
  5. $(\alpha + \beta) \odot \vec{x} = (\alpha \odot \vec{x}) \oplus (\beta \odot \vec{x})$,
  6. $1 \odot \vec{x} = \vec{x}$,
  7. existuje vektor $\vec{o} \in L$ takový, že pro každý vektor $\vec{x} \in L$ platí $0 \odot \vec{x} = \vec{o}$.
- Prvky množiny L nazýváme *vektory*,
- prvky množiny $\mathbb{R}$ nazýváme *skaláry*.
- Platí:
  - $\vec{x} \oplus \vec{o} = \vec{x}$ pro každý vektor $\vec{x} \in L$
    - protože: $\vec{x} \oplus \vec{o} = \vec{x} \oplus (0 \odot \vec{x}) = (1 \odot \vec{x}) \oplus (0 \odot \vec{x}) = (1 + 0) \odot \vec{x} = \vec{x}$
  - $\alpha \odot \vec{o} = \vec{o}$ pro každý skalár $\alpha \in \mathbb{R}$
    - protože: $\alpha \odot \vec{o} = \alpha \odot (0 \odot \vec{x}) = (\alpha \cdot 0) \odot \vec{x} = 0 \odot \vec{x} = \vec{x}$

Příklad. $L = \mathbb{R}^2$ ... vektory jsou dvojice reálných čísel (souřadnice bodů v reálné rovině)

- $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$
- $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- $\alpha \odot \vec{x} = \alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2)$

Příklad. $L = \mathbb{R}^3$ ... vektory jsou trojice reálných čísel

- $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$
- $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \oplus (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
- $\alpha \odot \vec{x} = \alpha \odot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3)$

Příklad. $L = \mathbb{R}^n$ ... vektory jsou n-tice reálných čísel

- $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

- $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
- $\alpha \odot \vec{x} = \alpha \odot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$

Příklad. $L = P_2$ ... vektory jsou polynomy nejvýše druhého řádu

- $p(x) = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$

Příklad. Množina polynomů <u>právě</u> druhého řádu <u>není</u> lineární prostor!

Příklad. $L = P_n$ ... vektory jsou polynomy nejvýše n-tého řádu

- $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$

Příklad. $L = F_D$ ... vektory jsou reálné funkce definované na množině $D \subseteq \mathbb{R}$, tj. $F_D = \{f \mid f\colon D \to \mathbb{R}\}$

- pro $u, v \in F_D$ a pro $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$\begin{aligned} (u \oplus v)(x) &= u(x) + v(x) \quad \text{pro každé } x \in D \\ (\alpha \odot u)(x) &= \alpha \cdot u(x) \quad \text{pro každé } x \in D \end{aligned}$$

2 Lineární podprostor

- Mějme lineární prostor L.
- Neprázdnou podmnožinu $M \subseteq L$ nazveme *lineárním podprostorem* prostoru L, pokud platí:
  1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in M\colon \quad \vec{x} \oplus \vec{y} \in M$,
  2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in M\colon \quad \alpha \odot \vec{x} \in M$.
- Lineární podprostor M je lineární prostor.
- Průnik dvou lineárních podprostorů je opět lineárním podprostorem.
- Sjednocení dvou lineárních podprostorů nemusí být lineárním podprostorem.

Poznámka. V dalším textu budeme, jak je v literatuře obvyklé, používat pro sčítání vektorů značení „+" a pro násobení vektoru skalárem značení „·", případně tento symbol zcela vynecháme. Tedy:

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= \vec{x} \oplus \vec{y}, \\ \alpha \cdot \vec{x} &= \alpha \vec{x} = \alpha \odot \vec{x}. \end{aligned}$$

Také budeme předpokládat, že operace násobení skalárem má přednost před operací sčítání vektorů.

3 Lineární kombinace, lineární závislost, lineární obal

- *Lineární kombinace* vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ je výraz

  $$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{x}_n,$$

  kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ jsou skaláry. Číslům $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ říkáme *koeficienty lineární kombinace.*
- Lineární kombinace se nazývá *triviální*, pokud jsou všechny její koeficienty nulové.
- Triviální lineární kombinace je <u>vždy</u> rovna nulovému vektoru.
- Vektory jsou *lineárně závislé*, pokud existuje <u>netriviální</u> lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru.
  - V opačném případě mluvíme o *lineárně nezávislých* vektorech.
- Vektory jsou lineárně závislé tehdy, pokud některý z nich je možné vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.
- *Lineární obal* množiny vektorů $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\} \subseteq L$ je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů.

- Lineární obal značíme $\langle\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}\rangle$, $\langle\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\rangle$ nebo $\langle B\rangle$.
- Lineární obal je lineárním podprostorem lineárního prostoru L.

Příklad. Vektor $(6,-9)$ je lineární kombinací vektorů $(2,-1)$ a $(0,3)$, protože:

$$(6,-9) \;=\; 3\cdot(2,-1) + (-2)\cdot(0,3).$$

Příklad. V lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou vektory $(2,-1,0)$, $(1,0,3)$ a $(1,-2,-9)$ lineárně závislé, protože například

$$2\cdot(2,-1,0) - 3\cdot(1,0,3) - (1,-2,-9) \;=\; (0,0,0).$$

Příklad. V lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou vektory $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$ lineárně nezávislé, protože rovnice

$$\alpha\cdot(1,0,0) + \beta\cdot(0,1,0) + \gamma\cdot(0,0,1) \;=\; (0,0,0)$$

má jediné (triviální) řešení: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Příklad. V lineárním prostoru P_2 jsou polynomy $2x^2 - x$, $x^2 + 3$ a $x^2 - 2x - 9$ lineárně závislé, protože například

$$2\cdot(2x^2 - x) - 3\cdot(x^2+3) - (x^2 - 2x - 9) \;=\; 0.$$

Příklad. V lineárním prostoru P_2 jsou polynomy x^2, x a 1 lineárně nezávislé, protože rovnice

$$\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma\cdot 1 \;=\; 0$$

má jediné (triviální) řešení: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Příklad. V lineárním prostoru $F_{\langle 0,\pi\rangle}$ jsou funkce $u(x) = \cos^2 x$, $v(x) = 2\sin^2 x$ a $w(x) = 4$ lineárně závislé, protože například

$$4\cdot\cos^2 x + 2\cdot 2\sin^2 x - 1\cdot 4 \;=\; 0 \qquad \text{pro všechna } x\in\langle 0,\pi\rangle\,.$$

Příklad. Lineární obal vektorů $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ (v lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$) jsou všechny vektory ve tvaru $(s,t,0)$, kde $s,t\in\mathbb{R}$.

Příklad. Lineární obal polynomů x^2, x a 1 jsou všechny polynomy nejvýše druhého řádu.

Příklad. Lineární obal bodu v rovině (pokud se nejedná o počátek) je přímka která obsahuje tento bod a počátek.

Cvičení. V R^3 vyjádřete $(5,12,-17)$ jako lineární kombinaci vektorů $(1,3,-1)$, $(-1,-2,5)$ a $(1,5,8)$.

Řešení. $(5,12,-17) = 2\cdot(1,3,-1) - 3\cdot(-1,-2,5) + 0\cdot(1,5,8)$

Cvičení. V R^3 vyjádřete $(2,3,-10)$ jako lineární kombinaci vektorů $(1,3,-1)$, $(-1,-2,5)$ a $(1,5,7)$.

Řešení. Nelze.

Cvičení. Jsou v lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ vektory $(1,2,-2,0)$, $(3,4,-1,1)$, $(1,5,7,0)$ a $(-2,3,3,-2)$ lineárně závislé?

Řešení. Ano.

Cvičení. Jsou v lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ vektory $(1,3,-2,1)$, $(2,7,-2,5)$, $(1,4,1,3)$ a $(1,5,1,9)$ lineárně závislé?

Řešení. Ne.

Cvičení. Jsou v lineárním prostoru P_3 polynomy $3x^3 + 2x^2 + x + 1$, $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$, $2x^3 + 5x^2 - x$ a $x^3 + x^2 + 2x - 2$ lineárně závislé?

Řešení. Ano.

4 Báze

- Mějme lineární prostor L.
- Množina vektorů $B \subseteq L$ se nazývá *báze* lineárního prostoru L, pokud:
  - B je lineárně nezávislá,
  - $\langle B \rangle = L$.
- Báze je minimální množina vektorů, které generují daný lineární prostor L.
- Každý vektor lineárního prostoru L lze (jednoznačně) vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze B.
- Koeficientům této lineární kombinace se říká *souřadnice vzhledem k bázi* B.
- Každý lineární prostor má bázi.
- Pro lineární prostor L, který má bázi s konečným počtem prvků, platí, že všechny jeho báze mají stejný počet prvků.
- Počet prvků báze takového lineárního prostoru nazveme *dimenzí* tohoto lineárního prostoru.

Příklad. Množina $B = \{(1,0),(0,1)\}$ je bází lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$. Nazýváme ji *standardní báze* tohoto prostoru. Například vektor $\vec{v} = (11,7)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $(11,7) = 11 \cdot (1,0) + 7 \cdot (0,1)$.

Příklad. Množina $C = \{(1,1),(3,1)\}$ je také bází lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$. Vektor $\vec{v} = (11,7)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $(11,7) = 5 \cdot (1,1) + 2 \cdot (3,1)$. Souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi C jsou tedy 5 a 2.

Příklad. Množina $C = \{(1,1),(3,1),(5,3)\}$ není bází lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$, protože vektory této množiny jsou lineárně závislé (ověřte).

Příklad. Množina $D = \{(3,1)\}$ není bází lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$, protože $\langle D \rangle \neq \mathbb{R}^2$ (například vektor $(1,2)$ není žádným násobkem bázového vektoru $(3,1)$).

Příklad. Množina $B = \{x^2, x, 1\}$ je bází lineárního prostoru polynomů nejvýše druhého řádu P_2. Nazýváme ji *standardní báze* tohoto prostoru. Například polynom $p(x) = x^2 + 5x + 2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $x^2 + 5x + 2 = 1 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 2 \cdot 1$.

Příklad. Množina $C = \{x^2+1, x^2+1, x+1\}$ je také bází lineárního prostoru P_2. Polynom $p(x) = x^2 + 5x + 2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $x^2 + 5x + 2 = 1 \cdot (x^2+1) + 5 \cdot (x^2+1) + 2 \cdot (x+1)$. Souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi C jsou tedy 1, 5 a 2.

Cvičení. V lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ vyjádřete vektoroy $(9,6)$ a $(-2,4)$ v souřadnicích báze $B = \{(1,3),(4,2)\}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} (9,6) &= 2 \cdot (1,3) + 1.5 \cdot (4,2), \\ (-2,4) &= 2 \cdot (1,3) + (-1) \cdot (4,2). \end{aligned}$$

Cvičení. V lineárním prostoru P_2 vyjádřete polynom $2x^2 + 3x + 1$ v souřadnicích báze $B = \{x^2 + 2x, x + 1, 2\}$;

Řešení. $2x^2 + 3x + 1 = 2 \cdot (x^2 + 2x) + (-1) \cdot (x+1) + 1 \cdot 2$

Cvičení. Ověřte, že množina všech řešení následující soustavy lineárních rovnic tvoří lineární prostor a nalezněte jeho bázi.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & 3b & - & c & + & 5d & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 5c & + & 3d & = & 0 \\ a & + & b & + & 3c & + & d & = & 0 \\ 2a & - & 3b & + & c & + & 7d & = & 0 \end{array}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$(a, b, c, d) = (-2s - 2t, -s + t, s, t) = s(-2, -1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$
Množina všech řešení této soustavy lineárních rovnic je vlastně lineární obal vektorů $(-2, -1, 1, 0)$ a $(-2, 1, 0, 1)$.
Bází je například množina $\{(-2, -1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$.

5 Skalární součin, velikost vektoru, vzdálenost dvou vektorů

- Mějme lineární prostor L.
- *Skalární součin* dvou vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in L$ značíme $(\vec{x}, \vec{y})$; je to operace typu $L \times L \to \mathbb{R}$, která pro každé tři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ a každý skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:
  1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$,
  2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$,
  3. $(\alpha \cdot \vec{x}, \vec{y}) = \alpha \cdot (\vec{x}, \vec{y})$,
  4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$,
  5. $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ pouze tehdy, když $\vec{x} = \vec{o}$.
- Pro každý vektor $\vec{x} \in L$ platí: $(\vec{o}, \vec{x}) = 0$.
- *Velikost* (též *normu*) vektoru $\vec{x} \in L$ definujeme jako reálné číslo dané předpisem:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

- Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in L$ a pro každý skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:
  1. $\|\vec{x}\| \geq 0$,
  2. $\|\vec{x}\| = 0$ pouze tehdy, když $\vec{x} = \vec{o}$,
  3. $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$,
  4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.
- *Vzdálenost* (též *metriku*) dvou vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in L$ definujeme jako reálné číslo dané předpisem:

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|.$$

- Pro každé tři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí:
  1. $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$,
  2. $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pouze tehdy, když $\vec{x} = \vec{y}$,
  3. $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \varrho(\vec{y}, \vec{x})$,
  4. $\varrho(\vec{x}, \vec{z}) \leq \varrho(\vec{x}, \vec{y}) + \varrho(\vec{y}, \vec{z})$.
- Řekneme, že dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in L$ jsou *na sebe kolmé* (nebo též *ortogonální*; značíme $\vec{x} \perp \vec{y}$), pokud $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Příklad. V lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ můžeme definovat skalární součin například předpisem:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = ((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Jedná se o tzv. *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$.

6 Prostor $L_2(a,b)$

Viz [Pre, Článek 16.1], [Rek, Článek 4] nebo [Olš, Poznámka 8.81].

- Řekneme, že funkce u je *v intervalu* $\langle a,b\rangle$ *integrovatelná s kvadrátem (druhou mocninou)*, pokud existují (a tedy mají konečnou hodnotu) integrály
$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x.$$
- Množinu všech takovýchto funkcí značíme $L_2(a,b)$.
- $L_2(a,b)$ je lineární prostor; je to navíc lineární podprostor lineárního prostoru $F_{\langle a,b\rangle}$ reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$.
- Na lineárním prostoru $L_2(a,b)$ lze zavést, pro funkce $u,v\in L_2(a,b)$, skalární součin (u,v), normu $\|u\|$ a vzdálenost $\varrho(u,v)$ pomocí předpisů:
$$(u,v) = \int_a^b u(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$
$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}, \tag{2}$$
$$\varrho(u,v) = \|u-v\|. \tag{3}$$
- Funkce $u,v\in L_2(a,b)$, pro něž platí $\varrho(u,v)=0$, nazveme *ekvivalentní v prostoru* $L_2(a,b)$.
- Takové dvě funkce se mohou lišit nejvýše na množině nulové míry (například v konečně mnoha bodech), říkáme také, že jsou si *rovny skoro všude.*
- Funkce $u\in L_2(a,b)$ je *normovaná v prostoru* $L_2(a,b)$ pokud je její norma rovna jedné.
- Funkce $u,v\in L_2(a,b)$ jsou *ortogonální v prostoru* $L_2(a,b)$ (značíme $u\perp v$) pokud $(u,v)=0$.

Příklad. Funkce $u(x)=1-x$ a $v(x)=x^2$ patří obě do prostoru $L_2(0,1)$, neboť následující integrály existují a jsou konečné:
$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},\\
\int_0^1 u^2(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-2x+x^2)\mathrm{d}x = \left[x-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6},\\
\int_0^1 v(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},\\
\int_0^1 v^2(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$
Funkce $w(x)=x^{-1}$ nepatří do prostoru $L_2(0,1)$, protože například následující integrál není konečný:
$$\int_0^1 w(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-1}\mathrm{d}x = [\ln|x|]_0^1 \to \infty$$
Velikosti funkcí u a v jsou:
$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sqrt{\int_0^1 u^2(x)\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{5}{6}},\\
\|v\| &= \sqrt{\int_0^1 v^2(x)\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1}{5}}.
\end{aligned}$$
Vzdálenost funkcí u a v je:
$$\begin{aligned}
\varrho(u,v) = \left\|1-x-x^2\right\| &= \sqrt{\int_0^1 (1-x-x^2)^2\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 (1-2x-x^2+2x^3+x^4)\mathrm{d}x}\\
&= \sqrt{\left[x-x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{11}{30}}.
\end{aligned}$$

Příklad. Následující funkce u a v jsou obě prvky prostoru $L_2(0,1)$ a jsou ekvivalentní v prostoru $L_2(a,b)$, protože jsou si rovny skoro všude (liší se pouze v jednom bodě, a to v bodě $\frac{1}{2}$).

$$\begin{aligned} u(x) &= x, \\ v(x) &= \begin{cases} x & \text{pokud } x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle, \\ 1 & \text{pokud } x = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Příklad. Funkce $u(x) = x - x^2$, $v(x) = 1 - 2x$ a $w(x) = 2x$ jsou prvky lineárního prostoru $L_2(0,1)$ (ověřte). Jejich vzájemné skalární součiny jsou rovny:

$$\begin{aligned} (u,v) &= \int_0^1 (x - x^2)(1-2x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - 3x^2 + 2x^3)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = 0, \\ (u,w) &= \int_0^1 (x - x^2)\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}, \\ (v,w) &= \int_0^1 (1-2x)\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x - 4x^2)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Platí tedy:

$$u \perp v, \qquad u \not\perp w, \qquad v \not\perp w.$$

7 Grammův determinant

Viz například [Var, Věta 5.2].

- Funkce $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L_2(a,b)$ jsou v $L_2(a,b)$ lineárně závislé právě tehdy, pokud je *Grammův determinant*

$$D(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det \begin{pmatrix} (u_1,u_1) & (u_1,u_2) & \ldots & (u_1,u_n) \\ (u_2,u_1) & (u_2,u_2) & \ldots & (u_2,u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_n,u_1) & (u_n,u_2) & \ldots & (u_n,u_n) \end{pmatrix}$$

  rovný nule.

Reference

[Olš] Petr Olšák: *Úvod do algebry, zejména lineární*, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 2013.

[DePo] Marie Demlová, Bedřich Pondělíček: *Úvod do algebry*, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 1997.

[Rek] Karel Rektorys: *Matematika 43 - Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami 2*, ČVUT, Fakulta stavební, 2001.

[Pre] Karel Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky I, II*, 5. nezměněné vydání, SNTL Praha, 1988.

[Var] Karel Rektorys: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, 5. nezměněné vydání, SNTL Praha, 1971.