Fourierovy řady

13. března 2020

Tento text pojímejte, prosím, pouze jako výpisky ze skript:
[Řady] *Ladislav Průcha: Řady, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 1996.*
Pro přesné znění definic a pro důkazy uvedených tvrzení vás odkazuji na tato skripta.
Dalším zdrojem studia může být i [Pre, Kapitola 16].

1 Úvod

- Periodické reálné funkce lze s výhodou aproximovat pomocí trigonometrických řad, které jsou speciálními případy řad Fourierových.

2 Číselná řada

- Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.
- Symbol
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$
nazýváme *číselnou řadou* (nebo jen *řadou*).
- Pro $n \in \mathbb{N}$ nazýváme číslo
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
n-tý částečný součet řady.
- Pokud existuje limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, potom hodnotu s nazýváme *součtem řady* a píšeme
$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$
- Pokud je s konečné reálné číslo, potom říkáme, že řada *konverguje.*
- Pokud $s = \infty$ nebo $s = -\infty$, potom říkáme, že řada *diverguje.*
- Pokud limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom říkáme, že řada *osciluje.*

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverguje, jejím součtem je 1.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverguje, jejím částečným součtem je $s_n = n$, a proto $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ osciluje. Její částečné součty jsou dány vztahem

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pokud je } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

3 Funkční řada

- Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na množině A.
- Symbol
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad = \quad f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots ,$$
kde $x \in A$, nazýváme *funkční řadou.*
- Množinu všech hodnot $x \in B \subseteq A$, pro které řada konverguje konverguje, nazýváme *oborem konvergence.* Píšeme potom
$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad x \in B,$$
a říkáme, že řada *konverguje bodově* pro $x \in B$.

Příklad (Mocninná řada)**.** Řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$
kde $a_k \in \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme *mocninnou řadou.* (Taylorovy řady jsou příkladem mocninných řad.)

Příklad (Fourierova řada)**.** Řadu
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x),$$
kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ a $\omega \in (0, \infty)$, nazýváme *trigonometrickou řadou* nebo *Fourierovou řadou.*

4 Periodické funkce

- Řekneme, že reálná funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *periodická* s periodou $T \in (0, \infty)$, pokud pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí
$$f(x + T) \quad = \quad f(x).$$
- **Poznámka:** Pokud je f periodická s periodou T, potom je periodická i s periodou kT pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.
- **Poznámka:** Chování periodické funkce f je plně dáno jejích chováním na intervalu $\langle 0, T \rangle$.
- Pokud jsou funkce f a g periodické, potom jsou periodické i funkce $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$ a f' (pokud má funkce f derivaci).
- Pokud je funkce f periodická a pokud je navíc v intervalu $\langle 0, T \rangle$ po částech spojitá, potom pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5 Fourierovy řady (obecněji)

- Mějme lineární prostor $L_2(a, b)$.
- Zvolme v $L_2(a, b)$ ortonormální bázi
$$B \quad = \quad \Big\langle \; \varphi_1, \;\; \varphi_2, \;\; \varphi_3, \;\; \dots \; \Big\rangle$$
- (Pro ortonormální bázi platí, že každé dvě různé bázové funkce jsou ortogonální, a že každá bázová funkce je normovaná.)
- Každou funkci $f \in L_2(a, b)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci bázových funkcí:
$$f \quad = \quad \alpha_1 \varphi_1 \quad + \quad \alpha_2 \varphi_2 \quad + \quad \alpha_3 \varphi_3 \quad + \quad \dots \tag{1}$$

- Jak najít koeficienty této lineární kombinace, pokud známe funkci f?
- Vynásobíme rovnici (1) „skalárně" po řadě funkcemi φ_1, φ_2, φ_3, …:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(f,\varphi_1) & = & (\alpha_1\varphi_1,\varphi_1) & + & (\alpha_2\varphi_2,\varphi_1) & + & (\alpha_3\varphi_3,\varphi_1) & + & \dots \\
(f,\varphi_2) & = & (\alpha_1\varphi_1,\varphi_2) & + & (\alpha_2\varphi_2,\varphi_2) & + & (\alpha_3\varphi_3,\varphi_2) & + & \dots \\
(f,\varphi_3) & = & (\alpha_1\varphi_1,\varphi_3) & + & (\alpha_2\varphi_2,\varphi_3) & + & (\alpha_3\varphi_3,\varphi_3) & + & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

- Vzhledem k vlastnostem skalárního součinu můzeme soustavu upravit na:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(f,\varphi_1) & = & \alpha_1\,(\varphi_1,\varphi_1) & + & \alpha_2\,(\varphi_2,\varphi_1) & + & \alpha_3\,(\varphi_3,\varphi_1) & + & \dots \\
(f,\varphi_2) & = & \alpha_1\,(\varphi_1,\varphi_2) & + & \alpha_2\,(\varphi_2,\varphi_2) & + & \alpha_3\,(\varphi_3,\varphi_2) & + & \dots \\
(f,\varphi_3) & = & \alpha_1\,(\varphi_1,\varphi_3) & + & \alpha_2\,(\varphi_2,\varphi_3) & + & \alpha_3\,(\varphi_3,\varphi_3) & + & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

- Protože funkce φ_1, φ_2, φ_3, … tvoří ortonormální bázi, dostáváme:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(f,\varphi_1) & = & \alpha_1\cdot 1 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
(f,\varphi_2) & = & 0 & + & \alpha_2\cdot 1 & + & 0 & + & \dots \\
(f,\varphi_3) & = & 0 & + & 0 & + & \alpha_3\cdot 1 & + & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

- Koeficienty lineární kombinace jsou tedy dány vztahy:

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & = & (f,\varphi_1) & = & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x, \\
\alpha_2 & = & (f,\varphi_2) & = & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi_2(x)\,\mathrm{d}x, \\
\alpha_3 & = & (f,\varphi_3) & = & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi_3(x)\,\mathrm{d}x. \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

- Čísla $\alpha_k = (f,\varphi_k)$, $k\in\mathbb{N}$, nazýváme *Fourierovy koeficienty* funkce f vzhledem k bázi B prostoru $L_2(a,b)$.
- Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f,\varphi_k)\ \varphi_k$$

je *Fourierova řada* funkce f vzhledem k bázi B prostoru $L_2(a,b)$.

6 Fourierovy řady (konkrétněji)

- V prostoru $L_2(0,T)$, $T\in(0,\infty)$, tvoří systém funkcí

$$\begin{aligned}
B &= \left\langle \sqrt{\frac{1}{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi}{T}x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{4\pi}{T}x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{4\pi}{T}x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{6\pi}{T}x,\ \dots \right\rangle \\
&= \left\langle \sqrt{\frac{1}{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi k}{T}x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2\pi k}{T}x \right\rangle_{k=1}^{\infty}
\end{aligned}$$

ortonormální bázi.

- Bývá zvykem značit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (ω je tzv. *úhlová frekvence*). Potom máme:

$$B = \left\langle \sqrt{\frac{1}{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega x \right\rangle_{k=1}^{\infty}$$

- Mějme funkci f, která je lineární kombinací funkcí báze B, tzn. existují koeficienty $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, takové, že:

$$f(x) = \alpha_0\sqrt{\frac{1}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega x + \beta_k\sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega x\right).$$

  Potom (podle Kapitoly 5) pro tyto koeficienty platí:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \left(\sqrt{\frac{1}{T}}, f\right) = \sqrt{\frac{1}{T}}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x,\\
\alpha_k &= \left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega x, f\right) = \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T f(x)\cos k\omega x\,\mathrm{d}x,\\
\beta_k &= \left(\sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega x, f\right) = \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T f(x)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

- **Trigonometrická řada:** Pro $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in (0, \infty)$ nazýváme

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos k\omega x + \beta_k \sin k\omega x)$$

  (klasickou) trigonometrickou řadou. Jedná se o speciální případ Fourierovy řady.

- **Vyjádření periodické funkce trigonometrickou řadou:** Mějme periodickou funkci f o periodě $T \in (0, \infty)$ a úhlové frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kterou lze vyjádřit trigonometrickou řadou, tj. existují koeficienty $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, takové, že:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos k\omega x + \beta_k \sin k\omega x) \qquad \ldots \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

  Potom pro tyto koeficienty platí:

$$\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

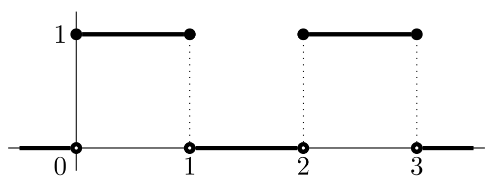
$$\alpha_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos k\omega x\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\beta_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

7 Příklady

Příklad. Nechť f je periodická funkce s periodou $T = 2$, která je na intervalu $\langle 0, 2)$ definována předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 0 & \text{pokud } x \in (1, 2)\,. \end{cases}$$



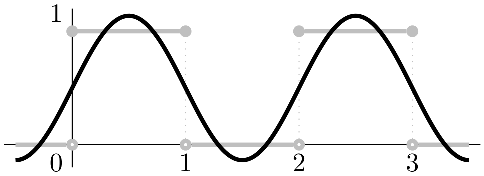
Vyjádříme tuto funkci trigonometrickou řadou. Úhlová frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Podle (2), (3) a (4) máme:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}x \;=\; 1,\\
\alpha_k &= \frac{2}{2}\int_0^1 1\cdot\cos k\pi x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{k\pi}\left[\sin k\pi x\right]_0^1 \;=\; 0,\\
\beta_k &= \frac{2}{2}\int_0^1 1\cdot\sin k\pi x\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{k\pi}\left[\cos k\pi x\right]_0^1 \;=\; -\frac{1}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0) \;=\; -\frac{1}{k\pi}\Big((-1)^k - 1\Big).
\end{aligned}$$

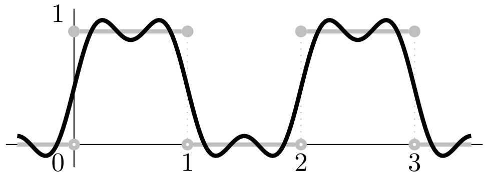
Funkci f tedy můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin k\pi x\\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi x + \frac{2}{7\pi}\sin 7\pi x + \ldots
\end{aligned}$$

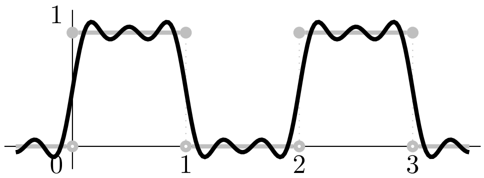
Grafy částečných součtů této řady jsou vidět na následujících obrázcích:



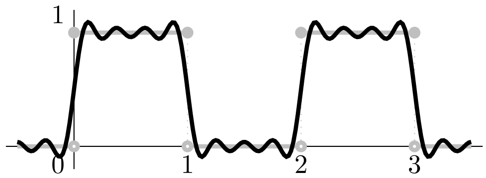
$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\pi x$



$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x$

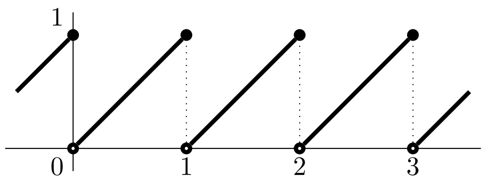


$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi x$



$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi x + \frac{2}{7\pi}\sin 7\pi x$

Příklad. Nechť f je periodická funkce s periodou $T = 1$, která je pro $x \in (0, 1\rangle$ definována předpisem $f(x) = x$.



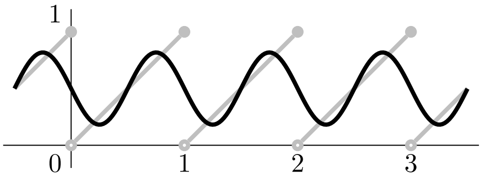
Vyjádříme tuto funkci trigonometrickou řadou. Úhlová frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Podle (2), (3) a (4) máme:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{1}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \;=\; 1,\\
\alpha_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 x\cdot\cos 2k\pi x\,\mathrm{d}x \;=\; 0,\\
\beta_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 x\cdot\sin 2k\pi x\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{k\pi}.
\end{aligned}$$

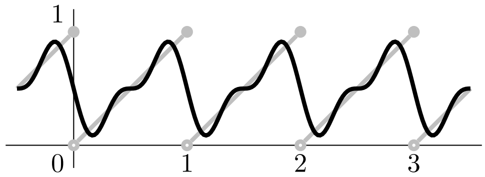
Funkci f tedy můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin 2k\pi x\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi x - \frac{1}{4\pi}\sin 8\pi x - \ldots
\end{aligned}$$

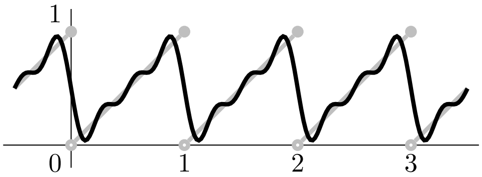
Grafy částečných součtů této řady jsou vidět na následujících obrázcích:



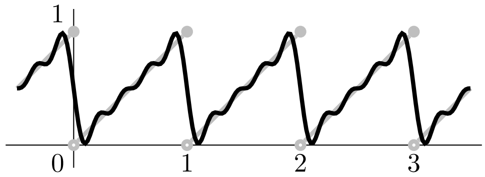
$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x$



$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x$



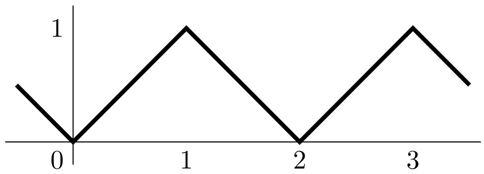
$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi x$



$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi x - \frac{1}{4\pi}\sin 8\pi x$

Příklad. Nechť f je periodická funkce s periodou $T = 2$, která je na intervalu $\langle 0, 2)$ definována předpisem:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x & \text{pokud } x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 2 - x & \text{pokud } x \in (1, 2)\,. \end{cases}$$



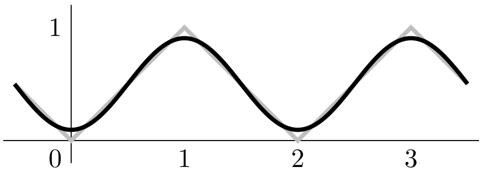
Vyjádříme tuto funkci trigonometrickou řadou. Úhlová frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Podle (2), (3) a (4) máme:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{2}\left(\int_0^1 x \,\mathrm{d}x \;+\; \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x\right) \;=\; 1, \\
\alpha_k &= \frac{2}{2}\left(\int_0^1 x\cos k\pi x \,\mathrm{d}x \;+\; \int_1^2 (2-x)\cos k\pi x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\left[\cos k\pi x\right]_0^1 \;-\; \frac{1}{k^2\pi^2}\left[\cos k\pi x\right]_1^2 \;=\; 2\cdot\frac{\cos k\pi - 1}{k^2\pi^2} \;=\; 2\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}, \\
\beta_k &= \frac{2}{2}\left(\int_0^1 x\sin k\pi x \,\mathrm{d}x \;+\; \int_1^2 (2-x)\sin k\pi x\,\mathrm{d}x\right) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

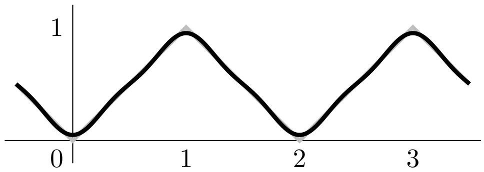
Funkci f tedy můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
f(x) \;&\sim\; \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \frac{4}{49\pi^2}\cos 7\pi x - \ldots
\end{aligned}$$

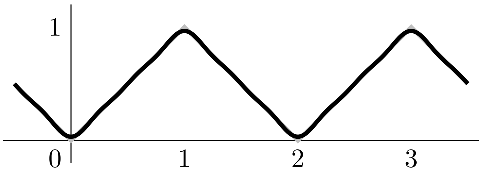
Grafy částečných součtů této řady jsou vidět na následujících obrázcích:



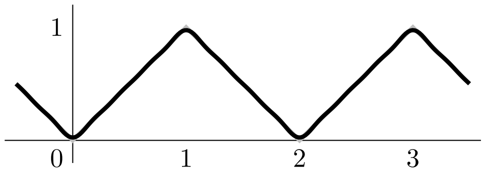
$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi x$



$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x$

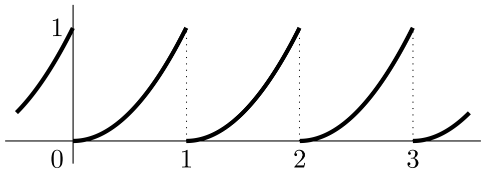


$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x$



$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \frac{4}{49\pi^2}\cos 7\pi x$

Příklad. Nechť f je periodická funkce s periodou $T = 1$, která je pro $x \in (0, 1\rangle$ definována předpisem $f(x) = x^2$.



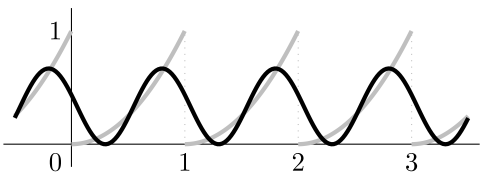
Vyjádříme tuto funkci trigonometrickou řadou. Úhlová frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Podle (2), (3) a (4) máme:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \\
\alpha_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cdot \cos 2k\pi x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2\pi^2}, \\
\beta_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cdot \sin 2k\pi x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k\pi}.
\end{aligned}$$

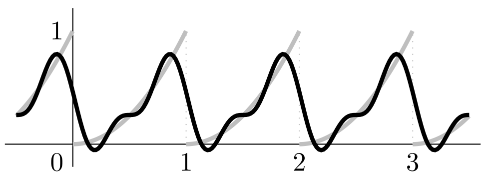
Funkci f tedy můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\cos 2k\pi x - \frac{1}{k\pi}\sin 2k\pi x\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x \\
&\quad + \frac{1}{9\pi^2}\cos 6\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi x + \frac{1}{16\pi^2}\cos 8\pi x - \frac{1}{4\pi}\sin 8\pi x + \dots
\end{aligned}$$

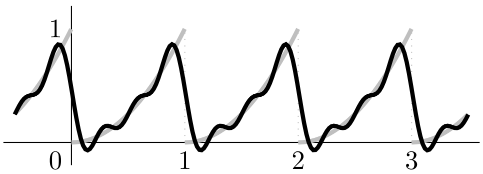
Grafy částečných součtů této řady jsou vidět na následujících obrázcích:



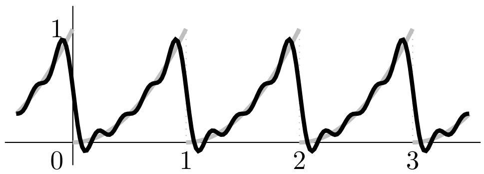
$\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x$



$\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x$



$\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x$
$+ \frac{1}{9\pi^2}\cos 6\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi x$



$\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x$
$+ \frac{1}{9\pi^2}\cos 6\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi x + \frac{1}{16\pi^2}\cos 8\pi x - \frac{1}{4\pi}\sin 8\pi x$

8 Cvičení

Cvičení. Necht' f je periodická funkce s periodou $T = 2$, která je pro $x \in (-1, 1\rangle$ definována předpisem $f(x) = x^2$. Vyjádřete tuto funkci trigonometrickou řadou.

Řešení.

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos k\pi x$$

Cvičení. Necht' f je periodická funkce s periodou $T = 1$, která je pro $x \in (0, 1\rangle$ definována předpisem $f(x) = \frac{x+1}{2}$. Vyjádřete tuto funkci trigonometrickou řadou.

Řešení.

$$f(x) \quad = \quad \frac{3}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi x$$

Cvičení. Necht' f je periodická funkce s periodou $T = 2$, která je na intervalu $\langle 0, 2)$ definována předpisem:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 0 & \text{pokud } x \in (1, 2)\,. \end{cases}$$

Vyjádřete tuto funkci trigonometrickou řadou.

Řešení.

$$f(x) \quad = \quad \frac{3}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^k}{2k^2\pi^2} \cos k\pi x + \frac{2 - (-1)^k}{2k\pi} \sin k\pi x \right)$$

Cvičení. Necht' f je periodická funkce s periodou $T = 1$, která je pro $x \in (0, 1\rangle$ definována předpisem $f(x) = 1 - x$. Vyjádřete tuto funkci trigonometrickou řadou.

Řešení.

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi x$$

Cvičení. Necht' f je periodická funkce s periodou $T = 2$, která je na intervalu $\langle 0, 2)$ definována předpisem:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x & \text{pokud } x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 0 & \text{pokud } x \in (1, 2)\,. \end{cases}$$

Vyjádřete tuto funkci trigonometrickou řadou.

Řešení.

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \cos k\pi x - \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin k\pi x \right)$$

Reference

[Řady] Ladislav Průcha: *Řady*, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 1996.

[Pre] Karel Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky I, II*, 5. nezměněné vydání, SNTL Praha, 1988.