Lineární diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami

3. dubna 2020

Tento text pojímejte, prosím, pouze jako výpisky ze skript:
[Rek] *Karel Rektorys: Matematika 43 - Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami 2, ČVUT, Fakulta stavební.*

1 Lineární diferenciální rovnice

- *Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu* je rovnice typu:

$$a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) \;=\; f(x),$$

  nebo stručněji:

$$a_n\, u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \ldots + a_2\, u'' + a_1\, u' + a_0\, u \;=\; f, \tag{1}$$

  kde:

  - n je přirozené číslo,
  - a_n, a_{n-1},... a_2, a_1, a_0 jsou reálné funkce, které nazýváme *koeficienty rovnice*,
  - a_n je „téměř všude” různá od nuly,
  - f je reálná funkce, kterou nazýváme *pravá strana rovnice*,
  - u je *hledaná funkce*,
  - $u^{(n)}$ značí n-tou derivaci funkce u,
  - x je rálná proměnná.

- Levou stranu rovnice můžeme označit Au, tedy:

$$Au \;=\; a_n\, u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \ldots + a_2\, u'' + a_1\, u' + a_0\, u.$$

  Potom rovnici (1) zapíšeme jako

$$Au \;=\; f.$$

- A je tzv. *lineární diferenciální operátor*:

  - „operátor”, neboť reálné funkci přiřazuje reálnou funkci,
  - „diferenciální”, neboť je složen z derivací zobrazované funkce,
  - „lineární”, neboť pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a pro každé dvě reálné funkce u a v splňuje (ověřte si):

$$\begin{aligned} A(\alpha \cdot u) &= \alpha \cdot Au, \\ A(u+v) &= Au + Av. \end{aligned}$$

- Příkladem lineárního diferenciálního operátoru je:

$$Au \;=\; x^4\, u'' + (\cos x)\, u' + \mathrm{e}^{3x}\, u$$

- Příkladem <u>ne</u>lineárního diferenciálního operátoru je:

$$Au \;=\; x^4\, u'' + \sqrt{(\cos x)\, u'} + \mathrm{e}^{3x}\, u^2$$

2 Lineární diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami

- V dalším textu se budeme zabývat především lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu, tj. všemi rovnicemi typu:

$$a_2(x)\, u(x)'' + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x)\, u(x) \;=\; f(x), \tag{2}$$

  kde a_2, a_1, a_0 jsou reálné funkce a a_2 je různá od nuly. Potom

$$Au \;=\; a_2\, u'' + a_1\, u' + a_0\, u$$

  je lineární diferenciální operátor druhého řádu.

- *Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu* je úloha nalézt takovou funkci u, která řeší rovnici (2) a navíc splňuje *počáteční podmínky*:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= u_0, \\ u'(x_0) &= u_1, \end{aligned}$$

  kde x_0, u_0 a u_1 jsou reálná čísla.

Příklad 1. Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$u''(x) + u(x) \;=\; 0, \tag{3}$$

které splňuje počáteční podmínky

$$u(0) \;=\; 1, \tag{4}$$
$$u'(0) \;=\; 0. \tag{5}$$

Řešení. Nalezneme nejprve obecné řešení diferenciální rovnice (3). Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstatními koeficienty (viz předmět „Matematika II." ve druhém semestru na TF). Její charakteristická rovnice je

$$\mu^2 + 1 \;=\; 0,$$

jejíž řešení jsou

$$\mu_1 \;=\; i, \qquad \mu_2 \;=\; -\,i.$$

Obecným řešením této diferenciální rovnice je tedy libovolná lineární kombinace funkcí $\cos x$ a $\sin x$:

$$u(x) \;=\; \alpha \cdot \cos x + \beta \cdot \sin x, \tag{6}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. První derivací této funkce je:

$$u'(x) \;=\; -\,\alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \cos x. \tag{7}$$

Dosadíme-li (6) a (7) do počátečních podmínek (4) a (5), dostaneme:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \cos 0 + \beta \cdot \sin 0 &= 1, \\ -\alpha \cdot \sin 0 + \beta \cdot \cos 0 &= 0, \end{aligned}$$

což vede na:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= 0. \end{aligned}$$

Řešením Cauchyovy úlohy (3), (4), (5), tj. diferenciální rovnice (3) splňujícím počáteční podmínky (4), a (5), je tedy funkce:

$$u(x) \;=\; \cos x.$$

- *Okrajovou úlohou (okrajovým problémem) pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu*

$$a_2(x)\, u(x)'' + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x)\, u(x) \;=\; f(x), \qquad x \in \langle 0, l \rangle\,, \tag{8}$$

  kde $l > 0$, nazýváme úlohu nalézt takovou funkci u, která:

– je definovaná a spojitá na $\langle 0, l\rangle$,
– má na $\langle 0, l\rangle$ definovanou a spojitou první a druhou derivaci.
– vyhovuje rovnici (8) pro všechna $x \in \langle 0, l\rangle$,
– splňuje tzv. *okrajové podmínky*:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u(0) \;+\; \beta \cdot u'(0) &= u_0, && (9)\\ \gamma \cdot u(l) \;+\; \delta \cdot u'(l) &= u_1, && (10)\end{aligned}$$

kde u_0, u_1, α, β, γ a δ jsou daná reálná čísla taková, že:
  * alespoň jedno z čísel α a β je nenulové,
  * alespoň jedno z čísel γ a δ je nenulové.

- *Dirichletovy okrajové podmínky* (podmínky 1. druhu) jsou speciálním případem okrajových podmínek (9) a (10), kdy $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ a $\delta = 0$. Tedy jsou to okrajové podmínky ve tvaru:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0,\\ u(l) &= u_1.\end{aligned}$$

- *Neumannovy okrajové podmínky* (podmínky 2. druhu) jsou speciálním případem okrajových podmínek (9) a (10), kdy $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ a $\delta = 1$. Tedy jsou to okrajové podmínky ve tvaru:

$$\begin{aligned} u'(0) &= u_0,\\ u'(l) &= u_1.\end{aligned}$$

- *Newtonovy okrajové podmínky* jsou obecným případem okrajových podmínek (9) a (10), kdy koeficienty α, β, γ a δ jsou nenulové.

- *Smíšené okrajové podmínky* jsou okrajové podmínky (9) a (10), ve tvaru:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0,\\ u'(l) &= u_1.\end{aligned}$$

Příklad 2. Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$u''(x) + u(x) = 0, \qquad x \in \langle 0, \pi\rangle\,, \tag{11}$$

které splňuje Dirichletovy okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, && (12)\\ u(\pi) &= 0. && (13)\end{aligned}$$

Řešení. Obecné řešení diferenciální rovnice (11) známe již z řešení Příkladu 1; viz (6). Dosadíme-li toto řešení do okrajových podmínek (12) a (13), dostaneme:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \cos 0 + \beta \cdot \sin 0 &= 0,\\ \alpha \cdot \cos \pi + \beta \cdot \sin \pi &= 0,\end{aligned}$$

což vede na:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 \cdot \beta &= 0,\\ -\alpha + 0 \cdot \beta &= 0.\end{aligned}$$

Máme tedy $\alpha = 0$ a β může být libovolné. Úloha má nekonečně mnoho řešení ve tvaru:

$$u(x) = \beta \sin x, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3. Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$u''(x) + u(x) = 0, \qquad x \in \langle 0, \pi\rangle\,, \tag{14}$$

které splňuje Dirichletovy okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, && (15)\\ u(\pi) &= 1. && (16)\end{aligned}$$

Řešení. Obecné řešení diferenciální rovnice (14) známe již z řešení Příkladu 1; viz (6). Dosadíme-li toto řešení do okrajových podmínek (15) a (16), dostaneme:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \cos 0 + \beta \cdot \sin 0 &= 0, \\ \alpha \cdot \cos \pi + \beta \cdot \sin \pi &= 1, \end{aligned}$$

což vede na:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 \cdot \beta &= 0, \\ -\alpha + 0 \cdot \beta &= 1, \end{aligned}$$

a následně:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \alpha &= -1. \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic nemá řešení a proto ani diferenciální rovnice (14) s okrajovými podmínkami (15) a (16) nemá řešení.

Příklad 4. Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$u''(x) + u(x) = 0, \qquad x \in \langle 0, \pi \rangle, \tag{17}$$

které splňuje smíšené okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, && (18) \\ u'(\pi) &= -1. && (19) \end{aligned}$$

Řešení. Obecné řešení diferenciální rovnice (17) známe již z řešení Příkladu 1; viz (6). Odtud známe i první derivaci tohoto řešení; viz (7). Dosadíme-li (6) a (7) do okrajových podmínek (18) a (19), dostaneme:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \cos 0 + \beta \cdot \sin 0 &= 1, \\ -\alpha \cdot \sin \pi + \beta \cdot \cos \pi &= -1, \end{aligned}$$

což vede na:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 \cdot \beta &= 1, \\ 0 \cdot \alpha + (-1) \cdot \beta &= -1, \end{aligned}$$

a následně:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= 1. \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic má právě jedno řešení a (jediným) řešením diferenciální rovnice (17) s okrajovými podmínkami (18) a (19) je tedy funce

$$u(x) = \cos x + \sin x.$$

- Z uvedených příkladů je vidět, že otázky spojené s existencí a jednoznačností řešení okrajových úloh nejsou (na rozdíl od Cauchyových úloh) jednoduché. Následující kapitola ukáže, jak nalézt odpověď na tuto otázku u některých typů okrajových úloh.

3 Problém vlastních čísel

- **Homogenní úloha:** Mějme diferenciální rovnici

$$u''(x) + \lambda\, g(x)\, u(x) = 0, \qquad x \in \langle 0, l \rangle, \tag{20}$$

kde:

  - g je <u>kladná</u> spojitá funkce definovaná na $\langle 0, l \rangle$,

– $l > 0$,

– $\lambda \in \mathbb{R}$,

– s okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, & (21)\\ u(l) &= 0. & (22)\end{aligned}$$

Pro které hodnoty λ má tato úloha řešení (žádné, jedno, nekonečně mnoho, ...)?

- (Hovoříme zde o tzv. *homogenní úloze*, protože pravá strana rovnice je nulová.)
- Je zřejmé, funkce u taková, že

$$u(x) \;=\; 0 \qquad \text{pro každé } x \in \langle 0, l\rangle\,,$$

je řešením úlohy pro kterékoliv $\lambda \in \mathbb{R}$. Takové řešení nazýváme *triviální řešení.*

- Hodnoty λ, pro která má úloha (20), (21), (22) i jiné, než triviální řešení, nazýváme *vlastní čísla úlohy*; jim odpovídající (nenulová) řešení nazýváme *vlastní funkce úlohy.*
- Pro diferenciální rovnici (20) s počátečními podmínkami (21) a (22) platí:
  – Úloha má spočetně mnoho vlastních čísel

  $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$$

  a všechna tato vlastní čísla jsou <u>kladná</u>.

  – Pokud parametr λ není roven žádnému z těchto vlastních čísel, potom má úloha právě jedno řešení, a to triviální.

  – Pokud je parametr λ roven některému vlastnímu číslu, potom má úloha nekonečně mnoho řešení a tato řešení jsou vlastními funkcemi odpovídajícími tomuto vlastnímu číslu.
- Pokud $g(x) = 1$ pro všechna $x \in \langle 0, l\rangle$ (obecně, pokud je g konstantní funkce), lze úlohu řešit snadno, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 5. Určete vlastní čísla úlohy

$$u''(x) + \lambda\, u(x) = 0, \quad x \in \langle 0, l\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0,$$

kde $l > 0$.

Řešení. Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstatními koeficienty, její charakteristická rovnice je

$$\mu^2 + \lambda \;=\; 0,$$

jejíž řešení jsou

$$\mu_1 \;=\; i\sqrt{\lambda}, \qquad \mu_2 \;=\; -\,i\sqrt{\lambda}.$$

Obecným řešením této diferenciální rovnice je tedy libovolná lineární kombinace funkcí $\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)$ a $\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)$:

$$u(x) \;=\; \alpha\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right) + \beta\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li toto řešení do okrajových podmínek, dostaneme:

$$\begin{aligned} \alpha\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right) + \beta\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right) &= 0,\\ \alpha\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) + \beta\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) &= 0,\end{aligned}$$

což vede na:

$$\begin{aligned} \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 &= 0, & (23)\\ \alpha\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) + \beta\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) &= 0, & (24)\end{aligned}$$

v maticovém zápisu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava bude mít kromě nulového (triviálního) řešení i řešení nenulové právě tehdy, když determinant matice této soustavy bude nulový (jak vyplývá z vlastností homogenních soustav lineárních rovnic, viz [Olš, Kapitola 5] nebo [DePo, Kapitola 8.2]):

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) \end{pmatrix} &= 0, \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) &= 0, \\ \sqrt{\lambda}\cdot l &= n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}, \\ \lambda &= \frac{n^2\pi^2}{l^2}. \end{aligned}$$

Vlastní čísla úlohy jsou tedy:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Abychom našli jim odpovídající vlastní funkce, dosadíme tato vlastní čísla do soustavy rovnic (23) a (24):

$$\begin{aligned} \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 &= 0, \\ \alpha\cdot\cos(n\pi) + \beta\cdot\sin(n\pi) &= 0, \end{aligned}$$

což můžeme zjednodušit na:

$$\begin{aligned} \alpha + 0\cdot\beta &= 0, \\ (-1)^n\alpha + 0\cdot\beta &= 0. \end{aligned}$$

Dostáváme, že $\alpha = 0$ a β může být libovolné. Každému vlastnímu číslu $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, kde $n \in \mathbb{N}$, tedy odpovídá spočetně mnoho vlastních funkcí

$$u_n(x) = \beta\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot x\right) = \beta\sin\frac{n\pi x}{l},$$

kde $\beta \in \mathbb{R}$.

- **Nehomogenní úloha:** Mějme diferenciální rovnici

$$u''(x) + \lambda\, g(x)\, u(x) = f(x), \qquad x \in \langle 0, l\rangle, \tag{25}$$

  kde:

  - g je kladná spojitá funkce definovaná na $\langle 0, l\rangle$,
  - f je nenulová spojitá funkce definovaná na $\langle 0, l\rangle$,
  - $l > 0$,
  - $\lambda \in \mathbb{R}$,
  - s okrajovými podmínkami:

$$u(0) = 0, \tag{26}$$
$$u(l) = 0. \tag{27}$$

  Pro které hodnoty λ má tato úloha řešení (žádné, jedno, nekonečně mnoho, ...)?

- (Hovoříme zde o tzv. *nehomogenní úloze*, protože pravá strana rovnice je nenulová.)
- Z předchozího víme, že přidružená homogenní úloha

$$u''(x) + \lambda\, g(x)\, u(x) = 0, \quad x \in \langle 0, l\rangle, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \tag{28}$$

  má spočetně mnoho vlastních čísel

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \tag{29}$$

  která jsou všechna kladná.

- Pro diferenciální rovnici (25) s počátečními podmínkami (26) a (27) platí:
  - Pokud parametr λ není roven žádnému z vlastních čísel (29), potom má nehomogenní úloha právě jedno řešení.
  - Pokud je parametr λ roven některému vlastnímu číslu (29), potom platí:
    * Pokud je funkce f v prostoru $L_2(0,l)$ ortogonální ke všem vlastním funkcím odpovídajícím vlastnímu číslu λ, potom má nehomogenní úloha nekonečně mnoho řešení.
    * V opačném případě nemá nehomogenní úloha řešení žádné.

Příklad 6. Úloha

$$u''(x) - g(x)\,u(x) = f(x), \quad x \in \langle 0, l\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0,$$

kde g a f jsou spojité funkce definované na $\langle 0, l\rangle$, g je kladná a $l > 0$, má vždy právě jedno řešení, protože záporné číslo $\lambda = -1$ není vlastním číslem přidružené homogenní úlohy.

Příklad 7. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy

$$u''(x) + u(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0.$$

Řešení. Jedná se o úlohu ve tvaru (25), kde $g(x) = 1$, $f(x) = \sin x$, $\lambda = 1$ a $l = \pi$:

$$u''(x) + \lambda\,u(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0.$$

Přidružená homogenní úloha má tvar

$$u''(x) + \lambda\,u(x) = 0, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0.$$

Tato úloha (viz Příklad 5) má vlastní čísla:

$$\lambda_n \;=\; \frac{n^2\pi^2}{\pi^2} \;=\; n^2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

a jim odpovídající vlastní funkce:

$$u_n(x) \;=\; \beta \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot x\right) \;=\; \beta \sin nx, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že $\lambda_1 = 1$ je vlastním číslem této úlohy a jemu odpovídají vlastní funkce ve tvaru

$$u_1(x) \;=\; \beta \sin x, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Zjistíme, zda jsou funkce u_1 a f v prostoru $L_2(0,\pi)$ ortogonální:

$$(u_1, f) \;=\; (\beta \sin x, \sin x) \;=\; \beta\,(\sin x, \sin x) \;=\; \beta \int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x \;=\; \beta\left[\frac{x - \cos x \sin x}{2}\right]_0^\pi \;=\; \beta\,\frac{\pi}{2}.$$

Jak vidíme, skalární součin (u_1, f) není v prostoru $L_2(0,\pi)$ obecně rovný nule. Funkce u_1 a f proto nejsou v prostoru $L_2(0,\pi)$ ortogonální a úloha tedy nemá žádné řešení.

Příklad 8. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy

$$u''(x) + u(x) = \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0.$$

Řešení. Tato úloha se od úlohy v Příkladu 7 liší pouze pravou stranou $f(x) = \cos x$. Stejně jako v předchozím případě tedy odvodíme, že $\lambda_1 = 1$ je vlastním číslem a jemu odpovídají vlastní funkce ve tvaru

$$u_1(x) \;=\; \beta \sin x, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Zjistíme, zda jsou funkce u_1 a f v prostoru $L_2(0,\pi)$ ortogonální:

$$(u_1, f) \;=\; (\beta \sin x, \cos x) \;=\; \beta\,(\sin x, \cos x) \;=\; \beta \int_0^\pi \sin x \cos x \,\mathrm{d}x \;=\; \beta\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^\pi \;=\; \beta \cdot 0 \;=\; 0.$$

Protože je skalární součin (u_1, f) v prostoru $L_2(0,\pi)$ vždy rovný nule, funkce u_1 a f jsou v prostoru $L_2(0,\pi)$ vždy ortogonální a úloha má tedy nekonečně mnoho řešení.

Reference

[DePo] Marie Demlová, Bedřich Pondělíček: *Úvod do algebry*, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 1997.

[Olš] Petr Olšák: *Úvod do algebry, zejména lineární*, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 2013.

[MiKu] Stanislav Míka, Alois Kufner: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro vysoké školy technické, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.

[Rek] Karel Rektorys: *Matematika 43 - Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami 2*, ČVUT, Fakulta stavební, 2001.

[Pre] Karel Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky I, II*, 5. nezměněné vydání, SNTL Praha, 1988.

[Var] Karel Rektorys: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, 5. nezměněné vydání, SNTL Praha, 1971.