Variační metody pro obyčejné diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami

10. dubna 2020

Tento text pojímejte, prosím, pouze jako výpisky ze skript:
[Rek] *Karel Rektorys: Matematika 43 - Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami 2, ČVUT, Fakulta stavební.*

1 Definiční obor diferenciálního operátoru

- Mějme diferenciální rovnici
$$Au = f, \quad x \in \langle 0, l \rangle\,, \tag{1}$$
kde:
  - A je lineární diferenciální operátor druhého řádu (obecně lze uvažovat operátory sudého řádu, zde se ale pro jednoduchost omezíme pouze na operátory druhého řádu),
  - u je hledaná funkce,
  - f je funkce patřící do prostoru $L_2(0, l)$,
  - s okrajovými podmínkami:
$$\alpha \cdot u(0) \;+\; \beta \cdot u'(0) \;=\; u_0, \tag{2}$$
$$\gamma \cdot u(l) \;+\; \delta \cdot u'(l) \;=\; u_1, \tag{3}$$
    kde u_0, u_1, α, β, γ a δ jsou daná reálná čísla taková, že:
    * alespoň jedno z čísel α a β je nenulové,
    * alespoň jedno z čísel γ a δ je nenulové.

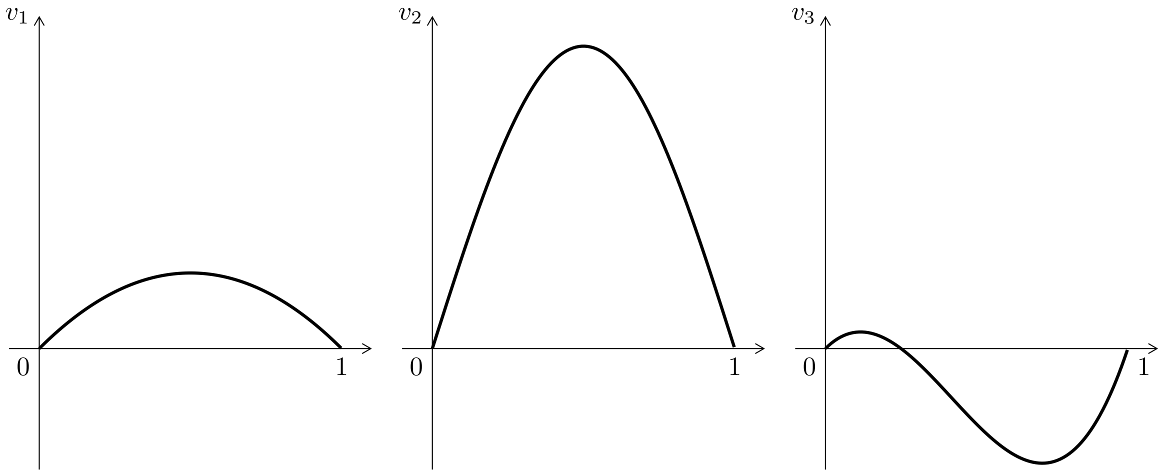
- Okrajové podmínky nazýváme *homogenní*, pokud jsou splněné nulovou funkcí, tj. funkcí u takovou, že
$$u(x) = 0 \qquad \text{pro každé } x \in \langle 0, l \rangle\,.$$
V našem zjednodušeném případě to znamená, že čísla u_0 a u_1 jsou v rovnicích (2) a (3) rovna nule.

- Symbolem $C^{(j)}\,\langle 0, l \rangle$ zde budeme značit množinu všech funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, l \rangle$, které jsou na tomto intervalu spojité a mají definované a spojité všechny své derivace až do řádu $j \in \mathbb{N}$.
  - (Ověřte si, že množina $C^{(j)}\,\langle 0, l \rangle$ je lineárním prostorem. Stačí se ujistit, že pro každé dvě funkce, které patří do $C^{(j)}\,\langle 0, l \rangle$, bude do $C^{(j)}\,\langle 0, l \rangle$ patřit i jejich libovolná lineární kombinace.)

- *Definiční obor operátoru A* (nebo také množina *přípustných funkcí*) okrajové úlohy (1), (2), (3) je množina D_A všech funkcí z prostoru $C^{(2)}\,\langle 0, l \rangle$, které splňují okrajové podmínky (2), (3):
$$D_A \;=\; \Big\{ u \in C^{(2)}\,\langle 0, l \rangle \;\mid\; \alpha u(0) + \beta u'(0) = u_0,\;\; \gamma u(l) + \delta u'(l) = u_1 \Big\}. \tag{4}$$

- Pokud jsou dané okrajové podmínky homogenní (tj. pokud $u_0 = u_1 = 0$), potom je D_A lineární prostor.
  - (Ověřte. Opět se stačí ujistit, že pro každé dvě funkce, které patří do D_A, bude do D_A patřit i jejich libovolná lineární kombinace.)

- Naším cílem je tedy nalézt na množině D_A takovou funkci, která splňuje diferenciální rovnici (1).



Obrázek 1: Příklady přípustných funkcí.

Příklad 1. Mějme okrajovou úlohu

$$-u''(x) + (x^2+1)\,u(x) = 3x, \quad x \in \langle 0, 1\rangle\,, \quad u(0)=0, \quad u(1)=0. \tag{5}$$

Definičním oborem lineárního diferenciálního operátoru

$$Au \;=\; -\,u'' + (x^2+1)\,u$$

je množina

$$D_A \;=\; \Big\{ u \in C^{(2)}\,\langle 0,1\rangle \;\mid\; u(0)=0,\;\; u(1)=0 \Big\}.$$

Příkladem funkcí, které <u>patří</u> do D_A, jsou funkce

$$\begin{aligned} v_1(x) &= x - x^2, \\ v_2(x) &= \sin \pi x, \\ v_3(x) &= 4x^3 - 5x^2 + x, \end{aligned}$$

jejichž grafy můžeme vidět na Obrázku 1. Všechny tyto funkce jsou totiž v bodech 0 a 1 rovny nule, jsou spojité na intervalu $\langle 0,1\rangle$ a mají na tomto intervalu definovanou a spojitou první i druhou derivaci (dokonce mají definované a spojité všechny své derivace).

Příkladem funkce, která <u>nepatří</u> do D_A, je funkce $w_1(x) = x^2$. Je sice spojitá a má definované a spojité všechny své derivace, ale nesplňuje okrajovou podmínku $w_1(1) = 0$.

Dalším příkladem funkce, která <u>nepatří</u> do D_A, je funkce

$$w_2(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{pokud } \; x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ 1 - x & \text{pokud } \; x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle. \end{cases}$$

Tato funkce sice splňuje okrajové podmínky a je spojitá, ale její první derivace je nespojitá (ověřte a najděte bod nespojitosti).

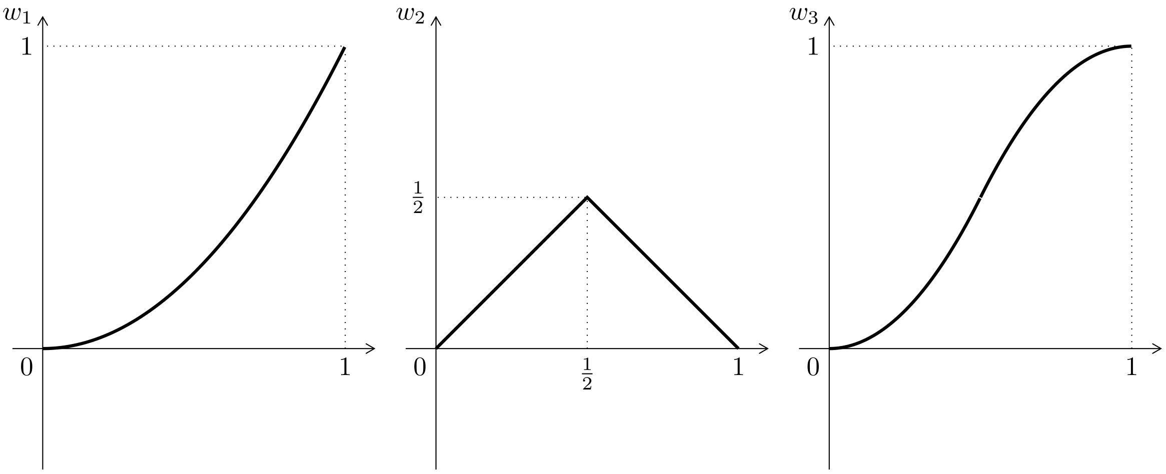
Příkladem funkce, která <u>nepatří</u> do D_A, je také funkce

$$w_3(x) \;=\; \begin{cases} 2x^2 & \text{pokud } \; x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ 1 - 2(1-x)^2 & \text{pokud } \; x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle. \end{cases}$$

Tato funkce, je sice spojitá a má definovanou a spojitou svou první derivaci, ale nesplňuje okrajové podmínky (ověřte) a její druhá derivace je nespojitá (ověřte a najděte bod nespojitosti).

Grafy funkcí w_1, w_2 a w_3 můžeme vidět na Obrázku (2).

(Poznamenejme ještě, že v tomto příkladě je množina D_A lineárním prostorem, protože okrajové podmínky $u(0) = 0$ a $u(1) = 0$ jsou homogenní.)



Obrázek 2: Příklady nepřípustných funkcí.

2 Vlastnosti lineárních diferenciálních operátorů

- Mějme dánu diferenciální rovnici (1) s okrajovými podmínkami (2) a (3), které jsou homogenní.

  $\Rightarrow$ Z toho plyne, že množina D_A je lineární prostor.

- Na lineárním prostoru D_A zavedeme skalární součin dvou funkcí $u, v \in D_A$ předpisem:

$$(u, v) \quad = \quad \int_0^l u(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x.$$

- Lineární diferenciální operátor A se nazývá:
  - SYMETRICKÝ na D_A, pokud pro každé dvě přípustné funkce $u, v \in D_A$ platí:

$$(Au, v) = (u, Av)\,, \tag{6}$$

  - POZITIVNÍ na D_A, pokud je symetrický a pokud pro každou přípustnou funkci $u \in D_A$ platí:

$$(Au, u) \quad \geq \quad 0, \tag{7}$$
$$(Au, u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, \tag{8}$$

  - POZITIVNĚ DEFINITNÍ na D_A, pokud je symetrický a pokud existuje takové $c > 0$, že pro každou přípustnou funkci $u \in D_A$ platí:

$$(Au, u) \geq c^2 \, \|u\|^2 \,.$$

- Platí [Rek, Věta 75]: Pokud je A pozitivní lineární diferenciální operátor na D_A, potom má úloha (1), (2), (3) nejvýše jedno řešení $u \in D_A$.

Příklad 2. U okrajové úlohy (5) z Příkladu 1 určete vlastnosti diferenciálního operátoru A.

Řešení.

- SYMETRIČNOST:

$$\begin{aligned}(Au, v) \quad &= \quad \big(-u'' + (x^2+1)\,u, v\big) \quad = \quad \int_0^1 \Big(-u''(x) + (x^2+1)\,u(x)\Big) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \quad \int_0^1 \Big(-u''(x)v(x) + (x^2+1)\,u(x)\,v(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \quad -\int_0^1 u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

První integrál upravíme podle pravidla „per partes":

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad -\left[u(x)'v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Díky okrajovým podmínkám máme $-\left[u(x)'v(x)\right]_0^1 = 0$ a tedy:

$$(Au, v) \quad = \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně dostaneme:

$$\begin{aligned}
(u, Av) \quad &= \quad \big(u, -v'' + (x^2+1)\,v\big) \quad = \quad \int_0^1 u(x)\cdot\Big(-v''(x) + (x^2+1)\,v(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \quad \int_0^1 \Big(-u(x)v''(x) + (x^2+1)\,u(x)\,v(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \quad -\int_0^1 u(x)v''(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \\
&= \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Podmínka (6) je tedy splněna a operátor A je symetrický.

- <u>Pozitivnost</u>:

$$\begin{aligned}
(Au, u) \quad &= \quad \big(-u'' + (x^2+1)\,u, u\big) \quad = \quad \int_0^1 \Big(-u''(x) + (x^2+1)\,u(x)\Big)\cdot u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \quad \int_0^1 \Big(-u''(x)u(x) + (x^2+1)\,u(x)\,u(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \quad -\int_0^1 u''(x)u(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)u^2(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

První integrál upravíme podle pravidla „per partes" a s použitím okrajových podmínek dostaneme:

$$-\int_0^1 u''(x)u(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad -\left[u(x)'u(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_0^1 \Big(u'(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x.$$

Máme tedy:

$$(Au, u) \quad = \quad \int_0^1 \Big(u'(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)u^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Můžeme si všimnout, že se jedná o součet dvou integrálů funkcí, které jsou na $\langle 0, l\rangle$ nezáporné, proto i jejich součet bude nezáporné číslo; tedy první podmínka pozitivnosti (7) operátoru A je splněna. Navíc lze snadno ověřit, že pokud je u konstantní nula, tj. pokud $u(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0, l\rangle$, potom hodnota obou integrálů bude rovna nule; tedy druhá podmínka pozitivnosti (8) operátoru A je splněna.

- <u>Pozitivní definitnost</u>:

$$\|u\|^2 \quad = \quad (u, u) \quad = \quad \int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Protože jsou oba integrály v rovnici (9) kladná čísla, platí pro všechna $x \in \langle 0, l\rangle$:

$$\int_0^1 \Big(u'(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)u^2(x)\,\mathrm{d}x \quad \geq \quad \int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

To znamená, že podmínka pozitivní definitnosti (2) je splněna například pro $c = 1$.

- Není vždy snadné stanovit, zda je daný diferenciální operátor symetrický, pozitivní nebo pozitivně definitní. Tabulka 1 ukazuje některé základní pozitivně definitní úlohy (tabulka je převzatá z [Rek, Tabulka 73], pro obsáhlejší tabulky viz [Pře, Kapitola 24] nebo [Var]). Z této tabulky je hned vidět, že úloha v Příkladech 1 a 2 je pozitivně definitní.

	rovnice	okrajové podmínky
1.	$-(pu')' + ru = f$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $r(x) \geq 0$	$u(a) = u(b) = 0$
2.	$-(pu')' + ru = f$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $r(x) \geq 0$	$u(a) = 0$, $u'(b) = 0$
3.	$(pu'')'' - (gu')' + ru = f$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $g(x) \geq 0$, $r(x) \geq 0$	$u(a) = 0$, $u(b) = 0$, $u'(a) = 0$, $u'(b) = 0$
4.	$(pu'')'' - (gu')' + ru = f$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $g(x) \geq 0$, $r(x) \geq 0$	$u(a) = 0$, $u(b) = 0$, $u''(a) = 0$, $u''(b) = 0$

Tabulka 1: Tabulka pozitivně definitních úloh

3 Věta o minimu funkcionálu energie

- Mějme diferenciální rovnici
$$Au = f, \quad x \in \langle 0, l \rangle\,, \tag{10}$$
kde:
  - A je pozitivní lineární diferenciální operátor druhého řádu na D_A,
  - u je hledaná funkce patřící do D_A,
  - f je funkce pařící do prostoru $L_2(0, l)$,
  - s homogenními okrajovými podmínkami:
$$\alpha \cdot u(0) + \beta \cdot u'(0) = 0, \tag{11}$$
$$\gamma \cdot u(l) + \delta \cdot u'(l) = 0, \tag{12}$$
    kde α, β, γ a δ jsou daná reálná čísla taková, že:
    * alespoň jedno z čísel α a β je nenulové,
    * alespoň jedno z čísel γ a δ je nenulové.
- D_A je definiční obor operátoru A.
- Definujme tzv. *funkcionál energie* $F\colon D_A \to \mathbb{R}$ předpisem:
$$Fu = (Au, u) - 2\,(f, u)\,. \tag{13}$$
- (F je „funkcionál", protože funkci přiřadí reálné číslo.)
- Platí [Rek, Věta 77]:

  $u_0 \in D_A$ je řešením úlohy (14), (15), (16) $\Leftrightarrow$ F nabývá pro u_0 na D_A (ostrého) minima.

4 Energetický prostor H_A

- Mějme diferenciální rovnici
$$Au = f, \quad x \in \langle 0, l \rangle\,, \tag{14}$$
kde:
  - A je pozitivně definitní lineární diferenciální operátor druhého řádu na D_A,
  - u je hledaná funkce patřící do D_A,
  - f je funkce pařící do prostoru $L_2(0, l)$,

– s homogenními okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u(0) \;+\; \beta \cdot u'(0) &= 0, &(15)\\ \gamma \cdot u(l) \;+\; \delta \cdot u'(l) &= 0, &(16)\end{aligned}$$

kde α, β, γ a δ jsou daná reálná čísla taková, že:

* alespoň jedno z čísel α a β je nenulové,
* alespoň jedno z čísel γ a δ je nenulové.

- Na množině přípustných funkcí D_A zavedeme tzv. *energetický skalární součin* předpisem:

$$(u, v)_A = (Au, v) \tag{17}$$

- Protože je A pozitivně definitní, splňuje energetický skalární součin všechny vlastnosti skalárního součinu, tj., pro každé tři funkce $u, v, w \in D_A$ a pro každé reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

  1. $(u, v)_A = (v, u)_A$,
  2. $(u + v, w)_A = (u, w)_A + (v, w)_A$,
  3. $(\alpha \cdot u, v)_A = \alpha \cdot (u, v)_A$,
  4. $(u, u)_A \geq 0$,
  5. $(u, u)_A = 0$ pouze tehdy, když $u(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0, l\rangle$.

- Díky tomu můžeme pomocí energetického skalárního součinu definovat:

  – normu, tzv. *energetickou normu*:

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}, \tag{18}$$

  – metriku, tzv. *energetickou metriku*:

$$\varrho_A(u, v) = \|u - v\|_A \,. \tag{19}$$

- Množinu D_A zúplníme, tj. přidáme limity všech cauchyovských posloupností (ve smyslu metriky ϱ_A). Tak dostaneme metrický prostor, který je úplný. Nazveme ho *energetický prostor* a značíme H_A.

- (Prostor H_A tedy můžeme chápat jako množinu přípustných funkcí D_A s energetickým skalárním součinem $(.,.)_A$ a přidanými limitními funkcemi.)

5 Variační metody: Ritzova metoda

- Mějme diferenciální rovnici

$$Au = f, \quad x \in \langle 0, l\rangle\,, \tag{20}$$

kde:

  – A je pozitivně definitní lineární diferenciální operátor druhého řádu na D_A,
  – u je hledaná funkce patřící do D_A,
  – f je funkce pařící do prostoru $L_2(0, l)$,
  – s homogenními okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u(0) \;+\; \beta \cdot u'(0) &= 0, &(21)\\ \gamma \cdot u(l) \;+\; \delta \cdot u'(l) &= 0, &(22)\end{aligned}$$

kde α, β, γ a δ jsou daná reálná čísla taková, že:

* alespoň jedno z čísel α a β je nenulové,
* alespoň jedno z čísel γ a δ je nenulové.

- Podle Kapitoly 4 sestrojíme energetický prostor H_A s energetickým skalárním součinem $(.,.)_A$.

- Posloupnost lineárně nezávislých funkcí

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ \in\ H_A \tag{23}$$

tvoří v prostoru H_A *bázi*, pokud každou funkci $u \in H_A$ dokážeme libovolně přesně aproximovat nějakou lineární kombinací těchto funkcí.

  – Přesněji, ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ taková, že:

$$\varrho_A \left(u,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right) < \varepsilon\,.$$

- Příklady bází v prostoru $L_2(0, l)$, $l > 0$, při okrajových podmínkách $u(0) = u(l) = 0$ jsou:
  – TRIGONOMETRICKÁ BÁZE: $v_k = \sin \frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$v_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad v_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad v_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \ldots$$

  – POLYNOMIÁLNÍ BÁZE: $v_k = x^{k-1} g(x)$, $k \in \mathbb{N}$,
    * kde $g \in C^{(2)} \langle 0, l\rangle$ je kladná funkce na intervalu $\langle 0, l\rangle$ splňující okrajové podmínky (21) a (22),
    * například pro funkci $g(x) = x(l-x)$, která splňuje Dirichletovy okrajové podmínky $g(0) = g(l) = 0$, dostaneme bázi:

$$v_1(x) = x(l-x), \quad v_2(x) = x^2(l-x), \quad v_3(x) = x^3(l-x), \quad \ldots, \quad v_k(x) = x^k(l-x), \quad \ldots$$

- Funkcionál energie minimalizujeme na n-rozměrném (tj. konečněrozměrném) podprostoru V_n prostoru H_A. Ze zvolené báze (23) tedy vybereme její konečnou podposloupnost. Výsledkem je potom funkce $\tilde{u}$

$$\tilde{u}(x) \ = \ \alpha_1 \cdot v_1(x) \ + \ \alpha_2 \cdot v_2(x) \ + \ \ldots \ + \ \alpha_n \cdot v_n(x),$$

která je aproximací skutečného řešení.

- Koeficienty lineární kombinace $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nalezneme jako (jediné) řešení lineární soustavy rovnic:

$$\begin{pmatrix} (v_1,v_1)_A & (v_1,v_2)_A & \ldots & (v_1,v_n)_A \\ (v_2,v_1)_A & (v_2,v_2)_A & \ldots & (v_2,v_n)_A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n,v_1)_A & (v_n,v_2)_A & \ldots & (v_n,v_n)_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,v_1) \\ (f,v_2) \\ \vdots \\ (f,v_n) \end{pmatrix}.$$

- Pozor! Zatímco v matici soustavy jsou energetické skalární součiny, na pravé straně rovnice jsou standardní skalární součiny.

Příklad 3. Řešte okrajovou úlohu

$$-u''(x) + x \cdot u(x) = 2, \quad x \in \langle 0, 1\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{24}$$

Ritzovou metodou s použitím polynomiální báze

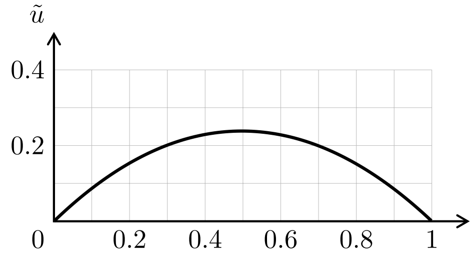
$$\begin{aligned} v_1(x) &= x(1-x) = x - x^2, \\ v_2(x) &= x^2(1-x) = x^2 - x^3. \end{aligned}$$

Řešení. Z Tabulky 1 vidíme, že diferenciální operátor

$$Au \ = \ -u'' + x \cdot u$$

je pozitivně definitní na D_A. Můžeme tedy použít Ritzovu metodu. Spočítáme první derivaci bázových funkcí:

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= 1 - 2x, \\ v_2'(x) &= 2x - 3x^2. \end{aligned}$$



Obrázek 3: Aproximace Ritzovou metodou.

S pomocí metody „per partes" a s užitím okrajových podmínek vyjádříme energetický skalární součin:

$$\begin{aligned}
(u,v)_A &= \int_0^1 \Big(-u''(x) + x\cdot u(x)\Big)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_0^1 u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_0^1 x\cdot u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{-[u'(x)v(x)]_0^1}_{=0} \;+\; \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_0^1 x\cdot u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_0^1 x\cdot u(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Aproximací řešení úlohy (24) bude funkce ve tvaru:

$$\tilde{u}(x) \;=\; \alpha_1\cdot v_1(x) + \alpha_2\cdot v_2(x),$$

kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} (v_1,v_1)_A & (v_1,v_2)_A \\ (v_2,v_1)_A & (v_2,v_2)_A \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}(f,v_1)\\ (f,v_2)\end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Spočítáme energetické skalární součiny v matici této soustavy lineárních rovnic (s použitím (25)):

$$\begin{aligned}
(v_1,v_1)_A &= \int_0^1 (1-2x)\cdot(1-2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\cdot\big(x-x^2\big)\cdot\big(x-x^2\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \big(1-4x+4x^2\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \big(x^3-2x^4+x^5\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x-2x^2+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{60} \;=\; \frac{7}{20},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_1,v_2)_A &= \int_0^1 (1-2x)\cdot\big(2x-3x^2\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\cdot\big(x-x^2\big)\cdot\big(x^2-x^3\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \big(2x-7x^2+6x^3\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \big(x^4-2x^5+x^6\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^2-\frac{7}{3}x^3+\frac{3}{2}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}+\frac{1}{105} \;=\; \frac{37}{210},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(v_2, v_2)_A &= \int_0^1 \left(2x - 3x^2\right) \cdot \left(2x - 3x^2\right) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 x \cdot \left(x^2 - x^3\right) \cdot \left(x^2 - x^3\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(4x^2 - 12x^3 + 9x^4\right) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(x^5 - 2x^6 + x^7\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{9}{5}x^5\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{7}x^7 + \frac{1}{8}x^8\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{15} + \frac{1}{168} \; = \; \frac{39}{280}.
\end{aligned}
$$

Koeficienty pravé strany soustavy lineárních rovnic spočítáme jako standardní skalární součiny:

$$
\begin{aligned}
(f, v_1) &= \int_0^1 2 \cdot \left(x - x^2\right) \, \mathrm{d}x \; = \; \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right) \, \mathrm{d}x \; = \; \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \; = \; \frac{1}{3}, \\
(f, v_2) &= \int_0^1 2 \cdot \left(x^2 - x^3\right) \, \mathrm{d}x \; = \; \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3\right) \, \mathrm{d}x \; = \; \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 \; = \; \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Rozšířená matice soustavy lineárních rovnic (26) proto bude mít tvar:

$$
\left(\begin{array}{cc|c}
\frac{7}{20} & \frac{37}{210} & \frac{1}{3} \\
\frac{37}{210} & \frac{39}{280} & \frac{1}{6}
\end{array}\right)
$$

a jejím (jediným) řešením budou čísla:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{6020}{6247} \doteq 0.964, \\
\alpha_2 &= -\frac{140}{6247} \doteq -0.022.
\end{aligned}
$$

Aproximací řešení úlohy (24) bude tedy funkce:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= \frac{6020}{6247} \cdot \left(x - x^2\right) - \frac{140}{6247} \cdot \left(x^2 - x^3\right) \\
&= \frac{6020}{6247}x - \frac{6160}{6247}x^2 + \frac{140}{6247}x^3 \\
&= 0.964x - 0.986x^2 + 0.022x^3.
\end{aligned}
$$

Graf této funkce můžeme vidět na Obrázku 3.

Příklad 4. Řešte okrajovou úlohu

$$
-u''(x) + x^2 \cdot u(x) = 1 - x^2, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle, \quad u(0) = 0, \quad u(2) = 0. \tag{27}
$$

Ritzovou metodou s použitím polynomiální báze

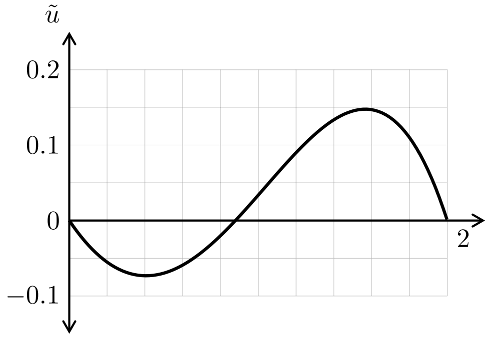
$$
\begin{aligned}
v_1(x) &= x(2 - x) \; = \; 2x - x^2, \\
v_2(x) &= x^2(2 - x) \; = \; 2x^2 - x^3, \\
v_3(x) &= x^3(2 - x) \; = \; 2x^3 - x^4.
\end{aligned}
$$

Řešení. Z Tabulky 1 vidíme, že diferenciální operátor $Au = -u'' + x^2 \cdot u$ je pozitivně definitní, můžeme tedy použít Ritzovu metodu. První derivace bázových funkcí je:

$$
\begin{aligned}
v_1'(x) &= 2 - 2x, \\
v_2'(x) &= 4x - 3x^2, \\
v_2'(x) &= 6x^2 - 4x^3.
\end{aligned}
$$

Energetický skalární součin vyjádříme jako:

$$
\begin{aligned}
(u, v)_A &= \int_0^1 \Big(- u''(x) + x^2 \cdot u(x) \Big) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x \; = \; - \int_0^1 u''(x) v(x) \, \mathrm{d}x \; + \; \int_0^1 x^2 \cdot u(x) v(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{-[u'(x)v(x)]_0^1}_{=0} \; + \; \int_0^1 u'(x) v'(x) \, \mathrm{d}x \; + \; \int_0^1 x^2 \cdot u(x) v(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 u'(x) v'(x) \, \mathrm{d}x \; + \; \int_0^1 x^2 \cdot u(x) v(x) \, \mathrm{d}x. \qquad (28)
\end{aligned}
$$



Obrázek 4: Aproximace Ritzovou metodou.

Aproximací řešení úlohy (27) bude funkce ve tvaru:

$$\tilde{u}(x) \;=\; \alpha_1 \cdot v_1(x) + \alpha_2 \cdot v_2(x) + \alpha_3 \cdot v_3(x),$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} (v_1,v_1)_A & (v_1,v_2)_A & (v_1,v_3)_A \\ (v_2,v_1)_A & (v_2,v_2)_A & (v_2,v_3)_A \\ (v_3,v_1)_A & (v_3,v_2)_A & (v_3,v_3)_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,v_1) \\ (f,v_2) \\ (f,v_3) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

S použitím (28) spočítáme energetické skalární součiny:

$$\begin{aligned}
(v_1,v_1)_A &= \int_0^2 (2-2x)\cdot(2-2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\cdot(2x-x^2)\cdot(2x-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (4-8x+4x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4x^4-4x^5+x^6)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[4x-4x^2+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2 + \left[\frac{4}{5}x^5-\frac{2}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7\right]_0^2 \\
&= \frac{8}{3}+\frac{128}{105} \;=\; \frac{136}{35} \;\doteq\; 3.886,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_1,v_2)_A &= \int_0^2 (2-2x)\cdot(4x-3x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\cdot(2x-x^2)\cdot(2x^2-x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (8x-14x^2+6x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4x^5-4x^6+x^7)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[4x^2-\frac{14}{3}x^3+\frac{3}{2}x^4\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^6-\frac{4}{7}x^7+\frac{1}{8}x^8\right]_0^2 \\
&= \frac{8}{3}+\frac{32}{21} \;=\; \frac{88}{21} \;\doteq\; 4.19,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_1,v_3)_A &= \int_0^2 (2-2x)\cdot(6x^2-4x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\cdot(2x-x^2)\cdot(2x^3-x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (12x^2-20x^3+8x^4)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4x^6-4x^7+x^8)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[4x^3-5x^4+\frac{8}{5}x^5\right]_0^2 + \left[\frac{4}{7}x^7-\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{9}x^9\right]_0^2 \\
&= \frac{16}{5}+\frac{128}{63} \;=\; \frac{1648}{315} \;\doteq\; 5.232,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(v_2, v_2)_A &= \int_0^2 (4x - 3x^2)\cdot(4x-3x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\cdot(2x^2-x^3)\cdot(2x^2-x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (16x^2 - 24x^3 + 9x^4)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4x^6 - 4x^7 + x^8)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{16}{3}x^3 - 6x^4 + \frac{9}{5}x^5\right]_0^2 + \left[\frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{9}x^9\right]_0^2 \\
&= \frac{64}{15} + \frac{128}{63} \;=\; \frac{1984}{315} \doteq 6.298,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_2, v_3)_A &= \int_0^2 (4x - 3x^2)\cdot(6x^2-4x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\cdot(2x^2-x^3)\cdot(2x^3-x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (24x^3 - 34x^4 + 12x^5)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4x^7 - 4x^8 + x^9)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[6x^4 - \frac{34}{5}x^5 + 2x^6\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^8 - \frac{4}{9}x^9 + \frac{1}{10}x^{10}\right]_0^2 \\
&= \frac{32}{5} + \frac{128}{45} \;=\; \frac{416}{45} \doteq 9.244,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v_3, v_3)_A &= \int_0^2 (6x^2 - 4x^3)\cdot(6x^2-4x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\cdot(2x^3-x^4)\cdot(2x^3-x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (36x^4 - 48x^5 + 16x^6)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4x^8 - 4x^9 + x^{10})\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{36}{5}x^5 - 8x^6 + \frac{16}{7}x^7\right]_0^2 + \left[\frac{4}{9}x^9 - \frac{2}{5}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11}\right]_0^2 \\
&= \frac{384}{35} + \frac{2048}{495} \;=\; \frac{52352}{3465} \doteq 15.109.
\end{aligned}
$$

Koeficienty pravé strany jsou:

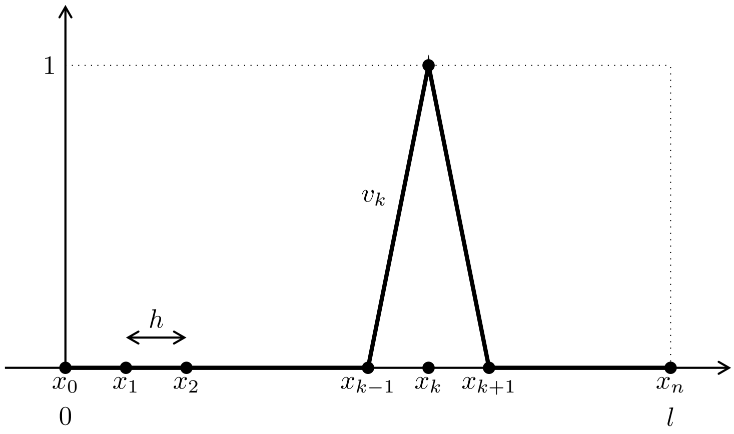
$$
\begin{aligned}
(f, v_1) &= \int_0^2 (-1 + x^2)\cdot(2x - x^2)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^2 (-2x + x^2 + 2x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \;=\; \frac{4}{15} \doteq 0.267, \\
(f, v_2) &= \int_0^2 (-1 + x^2)\cdot(2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^2 (-2x^2 + x^3 + 2x^4 - x^5)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^2 \;=\; \frac{4}{5} \doteq 0.8, \\
(f, v_3) &= \int_0^2 (-1 + x^2)\cdot(2x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^2 (-2x^3 + x^4 + 2x^5 - x^6)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{7}x^7\right]_0^2 \;=\; \frac{152}{105} \doteq 1.448.
\end{aligned}
$$

Rozšířená matice soustavy lineárních rovnic (29) má potom tvar:

$$
\left(\begin{array}{rrr|r}
3.886 & 4.19 & 5.232 & 0.267 \\
4.19 & 6.298 & 9.244 & 0.8 \\
5.232 & 9.244 & 15.109 & 1.448
\end{array}\right)
$$

a jejím řešením jsou čísla:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &\doteq -0.186, \\
\alpha_2 &\doteq 0.154, \\
\alpha_3 &\doteq 0.066.
\end{aligned}
$$



Obrázek 5: Bázová funkce v metodě konečných prvků.

Aproximací řešení úlohy (27) je funkce:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &\doteq -0.186 \cdot x(2-x) + 0.154 \cdot x^2(2-x) + 0.066 \cdot x^3(2-x)\\ &\doteq -0.372\,x + 0.494\,x^2 - 0.022\,x^3 + 0.066\,x^4.\end{aligned}$$

Graf této funkce můžeme vidět na Obrázku 4.

6 Metoda konečných prvků

- Tato metoda je modifikací Ritzovy metody se speciální volbou báze.
- Pro obyčejný diferenciální problém je tato báze dána následujícím způsobem:
  - Mějme ekvidistantní dělení $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ intervalu $\langle 0, l\rangle$, vzdálenost dovu sousedních bodů označme h.
  - Báze je tvořena funkcemi (viz Obr. 5):

$$v_k = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{h} & \text{pokud } x \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle\ . \\ \frac{x_{k+1}-x}{h} & \text{pokud } x \in \langle x_k, x_{k+1}\rangle\ . \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

  - Jedná se o tzv. *„spline"* funkce (funkce nenulové jen na „malé části" svého definičního oboru).

Příklad 5. Řešte okrajovou úlohu z Příkladu 3:

$$-u''(x) + x \cdot u(x) = 2, \quad x \in \langle 0, 1\rangle\,, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{30}$$

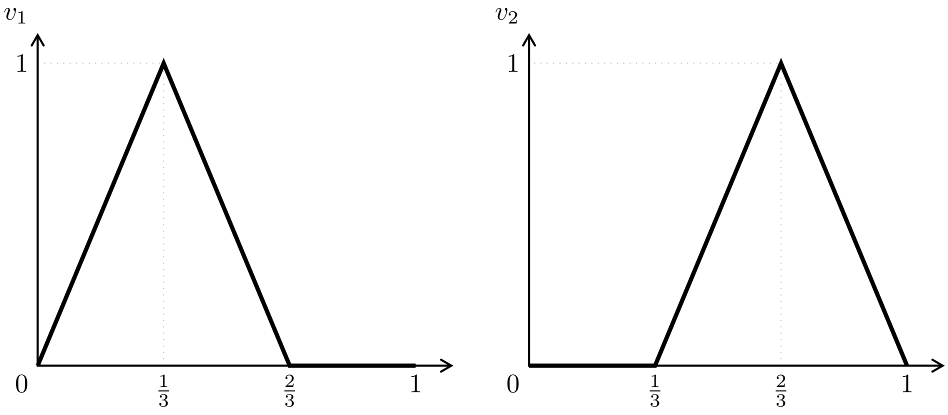
metodou konečných prvků s použitím bázových funkcí:

$$v_1(x) \;=\; \begin{cases} 3x & \text{pokud } x \in \left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle, \\ 2-3x & \text{pokud } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle, \\ 0 & \text{pokud } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right\rangle, \end{cases} \qquad v_2(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in \left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle, \\ 3x-1 & \text{pokud } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle, \\ 3-3x & \text{pokud } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right\rangle. \end{cases}$$

(Grafy těchto bázových funkcí můžeme vidět na Obrázku 6.)

Řešení. Protože se jedná o pozitivně definitní úlohu (viz řešení Příkladu 3), můžeme metodu konečných prvků použít. Spočítáme první derivaci bázových funkcí:

$$v_1'(x) \;=\; \begin{cases} 3 & \text{pokud } x \in \left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle, \\ -3 & \text{pokud } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle, \\ 0 & \text{pokud } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right\rangle, \end{cases} \qquad v_2'(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in \left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle, \\ 3 & \text{pokud } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle, \\ -3 & \text{pokud } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right\rangle. \end{cases}$$



Obrázek 6: Příklad bázových funkcí v metodě konečných prvků.

Z řešení Příkladu 3 již máme vyjádřený energetický skalární součin:

$$(u,v)_A \quad = \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \;\; + \;\; \int_0^1 x\cdot u(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{31}$$

Aproximací řešení úlohy (30) bude funkce ve tvaru:

$$\tilde{u}(x) \quad = \quad \alpha_1\cdot v_1(x) + \alpha_2\cdot v_2(x),$$

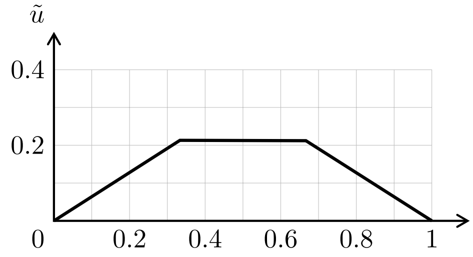
kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ jsou řešením soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} (v_1,v_1)_A & (v_1,v_2)_A \\ (v_2,v_1)_A & (v_2,v_2)_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} (f,v_1) \\ (f,v_2) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Spočítáme energetické skalární součiny (s použitím (31)):

$$\begin{aligned}
(v_1,v_1)_A \quad &= \quad \int_0^1 v_1'(x)\cdot v_1'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\cdot v_1(x)\cdot v_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \quad \int_0^{\frac{1}{3}} 3^2\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (-3)^2\,\mathrm{d}x \;+\; \int_0^{\frac{1}{3}} x\cdot 9x^2\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \underbrace{x\cdot(2-3x)^2}_{=\,4x-12x^2+9x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \quad [9x]_0^{\frac{1}{3}} \;+\; [9x]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \;+\; \left[\frac{9}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{3}} \;+\; \left[2x^2 - 4x^3 + \frac{9}{4}x^4\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \\
&= \quad 3 \;+\; 3 \;+\; \frac{1}{36} \;+\; \frac{5}{108} \;=\; \frac{656}{108} \;\doteq\; 6.074,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_1,v_2)_A \quad &= \quad \int_0^1 v_1'(x)\cdot v_2'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\cdot v_1(x)\cdot v_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \quad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 3\cdot(-3)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \underbrace{x\cdot(2-3x)\cdot(3x-1)}_{=\,-2x+9x^2-9x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \quad [-9x]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \;+\; \left[-x^2+3x^3-\frac{9}{4}x^4\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \;=\; -3+\frac{1}{36} \;=\; -\frac{107}{36} \;\doteq\; -2.972,
\end{aligned}$$



Obrázek 7: Aproximace metodou konečných prvků.

$$
\begin{aligned}
(v_2, v_2)_A &= \int_0^1 v_2'(x)\cdot v_2'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\cdot v_2(x)\cdot v_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 3^2\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{2}{3}}^{1} (-3)^2\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \underbrace{x\cdot(3x-1)^2}_{=\,9x^3-6x^2+x}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{2}{3}}^{1} \underbrace{x\cdot(3-3x)^2}_{=\,9x-18x^2+9x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= [9x]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \;+\; [9x]_{\frac{2}{3}}^{1} \;+\; \left[\frac{9}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \;+\; \left[\frac{9}{2}x^2 - 6x^3 + \frac{9}{4}x^4\right]_{\frac{2}{3}}^{1} \\
&= 3 \;+\; 3 \;+\; \frac{7}{108} \;+\; \frac{1}{12} \;=\; \frac{664}{108} \;\doteq\; 6.148.
\end{aligned}
$$

Spočítáme koeficienty pravé strany:

$$
\begin{aligned}
(f, v_1) &= \int_0^1 f(x)\cdot v_1(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\frac{1}{3}} 2\cdot 3x\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2\cdot(2-3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[3x^2\right]_0^{\frac{1}{3}} \;+\; \left[4x-3x^2\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \;=\; \frac{1}{3} \;+\; \frac{1}{3} \;=\; \frac{2}{3}, \\
(f, v_2) &= \int_0^1 f(x)\cdot v_2(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2\cdot(3x-1)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\frac{2}{3}}^{1} 2\cdot(3-3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[3x^2-2x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \;+\; \left[6x-3x^2\right]_{\frac{2}{3}}^{1} \;=\; \frac{1}{3} \;+\; \frac{1}{3} \;=\; \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Soustava lineárních rovnic (32) má tvar:

$$
\left(\begin{array}{cc|c}
\frac{656}{108} & -\frac{107}{36} & \frac{2}{3} \\
-\frac{107}{36} & \frac{664}{108} & \frac{2}{3}
\end{array}\right)
$$

a jejím řešením jsou čísla:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &\doteq 0.213, \\
\alpha_2 &\doteq 0.212.
\end{aligned}
$$

Aproximací řešení úlohy (30) je funkce:

$$
\tilde{u}(x) \;=\; 0.213\cdot v_1(x) \;+\; 0.212\cdot v_2(x).
$$

Graf této funkce můžeme vidět na Obrázku 7 (porovnejte s grafem na Obrázku 3).

Reference

[DePo] Marie Demlová, Bedřich Pondělíček: *Úvod do algebry*, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 1997.

[Olš] Petr Olšák: *Úvod do algebry, zejména lineární*, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, 2013.

[MiKu] Stanislav Míka, Alois Kufner: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro vysoké školy technické, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.

[Rek] Karel Rektorys: *Matematika 43 - Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami 2*, ČVUT, Fakulta stavební, 2001.

[Pře] Karel Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky I, II*, 5. nezměněné vydání, SNTL Praha, 1988.

[Var] Karel Rektorys: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, 5. nezměněné vydání, SNTL Praha, 1971.