METODA SÍTÍ

Matematika již poměrně dávno vytvořila matematické modely pro značně komplikované problémy z nejrůznějších oblastí života. Mnohé z nich však teprve poměrně krátce, ve spojitosti s rychlým rozvojem numerické matematiky spojeným s rozvojem počítačů, umí řešit. V době, nazvěme ji "předpočítačovou", se aplikovaná matematika snažila odvodit pro řešení problémů uzavřené vzorce, které nevyžadovaly velký počet početních operací. Tento stav však počítače zcela změnily. V souvislosti s jejich rozvojem a rozvojem jejich užití nabyly na důležitosti ty numerické metody řešení, které mají jednoduchý cyklický charakter. Takovou metodou je metoda sítí, zvaná též diferenční metoda.

Zabývejme se metodou sítí z hlediska jejího užití pro řešení okrajových úloh. Myšlenka metody sítí pro řešení okrajové úlohy je jednoduchá: v intervalu $\langle a, b\rangle$, na němž hledáme řešení zadané okrajové úlohy, zvolíme množinu bodů $D = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$, $n \in \mathbf{N}$ tak, že $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Množinu D nazýváme síť, x_i uzlové body sítě, číslo $h_i = x_i - x_{i-1}$ krok dělení. Je-li $h_i = \frac{b-a}{n}$ $\forall i$, říkáme, že dělení D je ekvidistantní.

V uzlových bodech sítě nahradíme derivace, které se vyskytují v zadané okrajové úloze, diferenčními podíly. Vycházíme přitom z definice derivace funkce v bodě:

$$y'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}.$$

Pro malé h můžeme psát

$$y'(x_0) \doteq \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h},$$

tedy

$$y'(x_0) \doteq \frac{y_1 - y_0}{h},$$

kde $y_1 \doteq y(x_1),\ y_0 \doteq y(x_0)$.

Obecně

$$y'(x_i) \doteq \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

h je krok dělení.

Jelikož, jak jistě víme, druhá derivace funkce v bodě je definována jako první derivace první derivace, nahradíme $y''(x_i)$ druhým diferenčním podílem takto:

$$\begin{aligned} y''(x_i) &\doteq \frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h}}{h} = \\ &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}. \end{aligned}$$

Obdobně pro vyšší derivace.

Takovýmto nahrazením dostaneme namísto původní okrajové úlohy soustavu diferenčních rovnic pro přibližné hodnoty hledané funkce v uzlových bodech sítě.

Poznámka. Lze užít (jsou odvozeny) i jiné náhrady derivací.

Užití metody sítí ukážeme na příkladě.

Příklad. Metodou sítí řešte následující problém.

$$\begin{aligned} &y'' - (x^2+1)\,y = x \qquad x \in (0,3) \\ &y(0) = 0,\ y(3) = 0. \end{aligned}$$

Volte krok dělení $h = 1$. Jelikož $f(x) = x$ je spojitá $\forall x \in \langle 0,3 \rangle$ a $g(x) = x^2 + 1$ je spojitá a kladná $\forall x \in \langle 0,3 \rangle$ a $\lambda = -1$ není vlastní číslo odpovídajícího homogenního problému, má zadaná úloha jediné řešení.

Interval $\langle 0,3 \rangle$ rozdělme dělicími body $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ na tři podintervaly délky $h = 1$. Označme y_i hodnoty řešení, které získáme metodou sítí v bodech x_i (je zřejmé, že $y_i \doteq y(x_i)$, neboť metoda sítí je metoda přibližná).
Sestavme diferenční rovnice v uzlových bodech x_1, x_2.

$$\begin{aligned} x_1 :\quad & \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1^2} - (1^2+1)y_1 = 1, \\ x_1 :\quad & \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{1^2} - (2^2+1)y_2 = 1. \end{aligned}$$

Užijme okrajových podmínek $y_0 = 0,\ y_3 = 0$. Dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} y_2 - 2y_1 - 2y_1 &= 1 \\ -2y_2 + \quad y_1 - 5y_2 &= 2. \end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} -4y_1 + \quad y_2 &= 1 \\ y_1 - 7y_2 &= 2. \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic jsou $y_1 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$. Čísla $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ jsou aproximací čísel $y(1)$ a $y(2)$, kde $y(x)$ je řešením zadané okrajové úlohy. Metodou sítí získáváme tedy aproximaci řešení zadané úlohy jen ve zvolených bodech $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ intervalu $\langle 0, 3\rangle$. Chceme-li získat aproximaci funkce $y(x)$ v celém intervalu $\langle 0, 3\rangle$, lze např. pro funkci $y(x)$ (užitím vypočtených hodnot) sestavit interpolační polynom nad intervalem $\langle 0, 3\rangle$.

Je vhodné položit si otázku o konvergenci metody sítí, tzn. zdali pro dostatečně malé h je rozdíl $|y(x_i) - y_i|$ dostatečně malý pro všechna i, a otázku po chybě metody. Dát univerzální odpověď není za současného stavu našich znalostí jednoduché, příslušné úvahy je nutné udělat pro každý jednotlivý případ. Podrobnosti viz Vitásek E.: Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic, Academia Praha, 1994.

Poznámka. Metodu sítí lze s úspěchem užít i pro řešení parciálních diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami a pro nalezení přibližných hodnot vlastních čísel okrajových úloh.