Konečné automaty

Jan Hora

Česká zemědělská univerzita

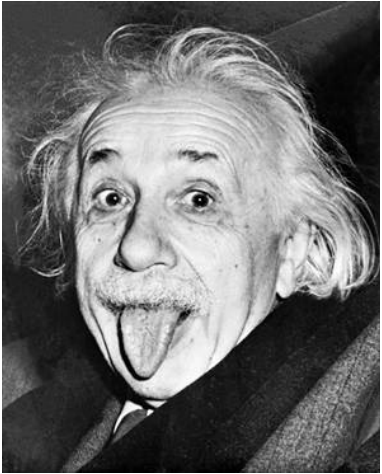
27. září 2016

Od písmenek ke slovům

- Definice
  Abeceda je konečná množina symbolů (znaků). Abecedu budeme obvykle značit symbolem Σ *(velké řecké písmeno Sigma).*
- Definice
  Slovo nad abecedou Σ *je každá konečná posloupnost znaků této abecedy.*
- Definice
  Délkou slova w *rozumíme počet jeho znaků a značíme* $|w|$.
- Značení
  Prázdné slovo (čili slovo neobsahující žádný znak) značíme ε *(čti epsilon),* $|\varepsilon| = 0$.

Od slov k jazyku

- Značení
  Množinu všech slov nad abecedou Σ značíme Σ^*.
- Definice
  Jazyk je jakákoli podmnožina množiny Σ^*.



Konečně konečný automat

- Definice

  Konečný automat (dále jen automat) je uspořádaná pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je konečná vstupní abeceda, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ je přechodová funkce, $q_0 \in F$ je iniciální stav a $F \subseteq Q$ je množina přijímajících stavů.

- Definice

  Výpočet automatu nad slovem $w = x_1 \dots x_n$ je posloupnost stavů $r_0, \dots, r_n$ tak, že $\delta(r_{i-1}, x_i) = r_i, i = 1, \dots n$.

- Definice

  Automat dané slovo přijímá, pokud výpočet nad tímto slovem končí ve stavu náležejícím do F.

Příklady

Příklad

Navrhněte konečný automat nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ *přijímající právě slova, která*

1. *obsahují alespoň dva znaky,*
2. *mají počet jedniček dělitelný třemi,*
3. *mají první a poslední znak stejný,*

Příklad

Navrhněte konečný automat nad abecedou $\Sigma = \{A, B\}$ *přijímající právě slova, která*

1. *začínají na BABA,*
2. *obsahují BABA,*
3. *končí na BABA.*

Příklady

Příklad

Zjistěte jaký jazyk přijímají automaty

a)

	0	1
$\rightarrow A$	E	B
B	C	E
C	D	E
$\leftarrow D$	E	E
E	E	E

b)

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
$\leftarrow 2$	1	3
3	3	3

Regulární není regulérní

- Definice
  Jazyk automatu A je množina slov, které automat přijímá. Značíme $L(A)$.

- Definice
  Jazyk L se nazývá regulární, pokud existuje konečný automat A, který ho přijímá, tedy $L = L(A)$.

Doplněk

Příklad

Navrhněte konečný automat, který přijímá právě slova neobsahující 001.

Věta

Doplněk $L' = \Sigma^* \setminus L$ *regulárního jazyka* L *je regulární jazyk.*

Průnik

Příklad

Navrhněte konečný automat přijímající právě slova, která končí na 1 *a zároveň obsahují sekvenci* 110.

Věta

Průnik dvou (konečně mnoha) regulárních jazyků je regulární jazyk.

Sjednocení

Příklad

Navrhněte konečný automat přijímající právě slova, která končí na 1 *nebo obsahují sekvenci* 110*.*

Věta

Sjednocení dvou (konečně mnoha) regulárních jazyků je regulární jazyk.

Neřešitelný příklad

Příklad

Navrhněte konečný automat, který přijímá právě slova $\{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Je to email?

Příklad

Navrhněte konečný automat nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c \ldots, z, \texttt{@}, .\}$, *přijímající slova, která mohou být emaily z české domény.*

Hospody, do kterých nevede cesta, jsou zbytečné

Příklad

Zjistěte, jaký jazyk přijímá automat

	0	1
$\rightarrow\leftarrow A$	B	D
B	D	B
$\leftarrow C$	C	B
D	B	D
$\leftarrow E$	B	D

Definice

Stav q se nazývá dosažitelný, pokud existuje slovo w takové, že výpočet nad tímto slovem končí ve stavu q.

Definice

Konečný automat se nazývá dosažitelný, pokud jsou dosažitelné všechny jeho stavy.

Příklad

Nalezněte dosažitelnou část automatu A a následně určete, jaký jazyk daný automat přijímá.

A	a	b
$\rightarrow 1$	5	5
$\leftarrow 2$	2	7
3	4	6
4	6	1
5	1	3
6	5	4
7	8	1
$\leftarrow 8$	2	5

Když dva dělají totéž, je to totéž

Definice

Dva automaty se nazývají ekvivalentní, pokud přijímají stejný jazyk.

Příklad

Nalezněte minimální automat, který přijímá stejný jazyk jako automat A.

A	a	b
$\rightarrow 1$	1	3
2	1	3
$\leftarrow 3$	6	5
4	1	5
5	2	4
$\leftarrow 6$	6	2

Proč to dělat složitě, když to jde jednoduše

- Věta

  Maximální faktorizace automatu A přijímá stejný jazyk jako automat A. Pokud byl automat A dosažitelný, je tato maximální faktorizace minimálním automatem (vzhledem k počtu stavů) přijímajícím jazyk $L(A)$.

- Definice

  Automat A se nazývá redukovaný, pokud je dosažitelný a jeho maximální faktorizace má stejný počet stavů jako automat původní.

Svatý grál teorie konečných automatů

- Věta
  Buďte A_1 a A_2 dva redukované automaty přijímající stejný jazyk. Pak jsou tyto automaty stejné až na přejmenování stavů.
- Věta
  Dva automaty jsou ekvivalentní (přijímají stejný jazyk) právě tehdy, když maximální faktorizace dosažitelných částí těchto automatů jsou shodné až na přejmenování stavů.

Vylepšený automat

Příklad

Navrhněte zařízení, které ve vstupním slově nad abecedou $\{0, 1\}$ *zamění nuly za jedničky a naopak.*

Příklad

Navrhněte zařízení, které přijímá právě slova $\{a^n b^n; n \in \mathbb{N}\}$.

Turingovy stroje

Definice

Turingův stroj je uspořádaná šestice $(Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, kde* Q *je konečná množina stavů,* Γ *je pracovní abeceda TS obsahující speciální prázdný symbol* $\square$*,* $\Sigma \subset \Gamma$ *je vstupní abeceda (neobsahuje* $\square$*),* q_0 *je iniciální stav,* $F \subset Q$ *je množina koncových stavů ve kterých výpočet končí a* $\delta : (Q - F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\}$ *je přechodová funkce.*

Definice

Algoritmus je Turingův stroj, který se pro každý vstup zastaví po konečném počtu kroků.