Pravděpodobnost a statistika

1. cvičení

(vytvořeno 20. září 2020)

Kombinatorika

Kolika způsoby lze vybrat k prvků z množiny o velikosti n?

1. Výběr **uspořádaný**, **bez vracení**:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \quad = \quad \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Výběr **uspořádaný**, **s vracením**:

$$n^k$$

3. Výběr **neuspořádaný**, **bez vracení**:

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

4. Výběr **neuspořádaný**, **s vracením**:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

5. **Permutace** n prvků:

$$n!$$

Příklady:

1. Kolik existuje nad anglickou abecedou (26 znaků) slov velikosti 4, ve kterých se neopakují písmena?

   Odpověď: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$

2. Kolik existuje nad anglickou abecedou (26 znaků) slov velikosti 4, ve kterých se písmena mohou opakovat?

   Odpověď: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456\,976$

3. Kolik různých volejbalových týmů (6 hráčů) lze utvořit, pokud máme k dispozici 10 hráčů?

   Odpověď: $\binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

4. Kolik je celočíselných, nezáporných řešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$?
   - Lze také formulovat takto: Kolika způsoby lze uložit k koulí do n krabic?
   - Řešení: Místo toho, abychom si představovali, že ukládáme koule do krabic, představme si raději, že všechny krabice máme jednoznačně označené (koule ne) a že ke každé kouli přiřadíme právě jednu krabici, do které bude vložena. Výsledkem je k-tice krabic, u které nezáleží na pořadí a ve které se krabice mohou opakovat. Jedná se tedy o neuspořádaný výběr s vracením a počet možností určíme podle vzorečku č. 4.
5. Kolika způsoby můžeme postavit 10 vojáků do řady?

   $$\text{Odpověď:} \qquad 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$$

Úlohy

Úloha 1.

1. Kolik různých volejbalových týmů lze složit ze skupiny 15 chlapců a 6 dívek, pokud v týmu vždy hrají 4 chlapci a 2 děvčata?
2. Kolika způsoby lze uspořádat n knih za sebe do poličky, pokud chceme, aby 3 vybrané byly vedle sebe.
3. Kolika způsoby lze v počítači vybarvit obrázek o čtyřech objektech, pokud máme k dispozici tříbitový barevný model?
4. Kolika způsoby lze do řady uspořádat k bílých a $n - k$ černých (vzájemně nerozlišitelných) koulí.
5. Kolik podmnožin má n-prvková množina?
6. Ve třírozměrném prostoru máme n bodů, z nichž žádné čtyři neleží v rovině. Kolik různých rovin tato množina určuje?

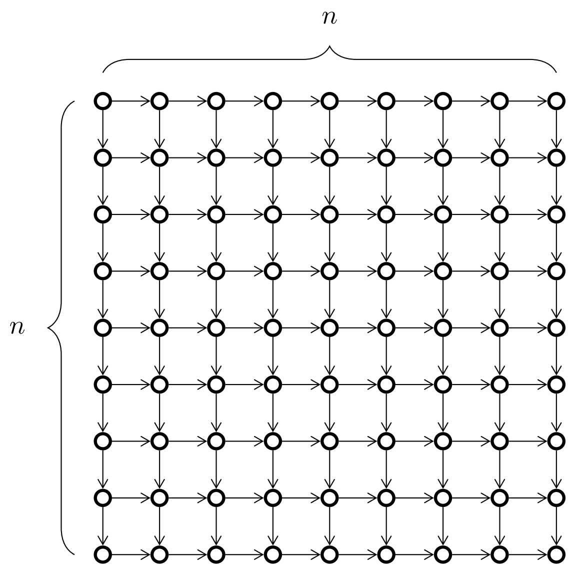
Úloha 2.

1. Kolik je pěticiferných čísel?
2. Kolik je pěticiferných čísel, ve kterých se neopakují číslice?
3. Kolik je pěticiferných čísel, ve kterých nejsou dvě stejné číslice vedle sebe?

Úloha 3. Z čísel $1, \ldots, n$ tvoříme posloupnosti délky k.

1. Kolik existuje různých klesajících posloupností?
2. Kolik existuje různých nerostoucích posloupností?

Úloha 4. Kolik v následujícím grafu existuje různých cest z levého horního vrcholu do pravého dolního vrcholu? Graf tvoří pravidelnou čtvercovou mřížku o šířce (a výšce) n vrcholů.



Řešení

Řešení 1:

1. $\binom{15}{4} \cdot \binom{6}{2}$
2. $(n-2)! \cdot 3!$

   (Pokud považujeme onu trojici knih za jednotku, třídíme $n-2$ jednotek, proto $(n-2)!$. Zmíněná trojice může být uspořádána $3!$ možnými způsoby.)

3. $2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 8^4 = 4\,096$
4. $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

   (Celou množinu lze uspořádat $n!$ možnými způsoby. Na tom, jak jsou uspořádány bílé (nebo černé) koule mezi sebou ale nezáleží. Proto výsledek podělíme počtem uspořádání bílých koulí $k!$ a počtem uspořádání černých koulí $(n-k)!$.)

5. 2^n

   (Každou podmnožinu n-prvkové množiny si lze představit tak, že každému prvku přiřadíme 0, pokud do podmnožiny nepatří, a 1, pokud

do podmnožiny patří. Takže se vlastně ptáme na počet řetězců délky n nad abecedou $\{0, 1\}$.)

6. $\binom{n}{3}$

Řešení 2:

1. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$
2. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$
3. $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59\,049$

Řešení 3:

1. $\binom{n}{k}$

   (Každému výběru k různých čísel odpovídá právě jedno uspořádání těchto čísel do klesající posloupnosti.)

2. $\binom{n+k-1}{k}$

   (V nerostoucí posloupnosti se mohou hodnoty opakovat, proto vybíráme k-tice s opakováním.)

Řešení 4:

$$\frac{(2(n-1))!}{(n-1)! \cdot (n-1)!} = \binom{2(n-1)}{n-1}$$

(U každé takovéto cesty potřebujeme jít $(n-1)$-krát doprava a $(n-1)$-krát dolů, v libovolném pořadí. Tedy se ptáme, kolik existuje řetězců složených z $(n-1)$ šipek doprava a $(n-1)$ šipek dolů. Jedná se tedy o obdobný problém, jako Příklad 4 v Úloze 1.)