Pravděpodobnost a statistika

2. cvičení

(vytvořeno 9. října 2020)

1 Laplaceův model pravděpodobnosti

- $\Omega \ldots$ množina elementárních jevů (všechny jsou „stejně pravděpodobné”)
- $A \subseteq \Omega \ldots$ jev
- $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \ldots$ pravděpodobnost jevu A
- *náhodná veličina* $X\colon \Omega \to \mathbb{R} \ldots$ (elementární) jevy reprezentujeme reálnými čísly
- *střední hodnota* $\mathrm{E}X = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$

Úloha 1. Komunikačním kanálem nám chodí slova délky k nad abecedou S, $|S| = n \geq 2$.

1. Jaká je pravděpodobnost, že přijaté slovo neobsahuje písmeno $s \in S$?
2. Jaká je množina elementárních jevů?
3. Jaká je množina příznivých jevů?

Úloha 2. Máme balíček 32 karet, mezi nimi 4 esa. Jaká je pravděpodobnost, že hráč obdrží alespoň jedno eso,

1. pokud mu rozdáme 5 karet obvyklým způsobem,
2. pokud vybereme 5 karet, setřídíme je vzestupně a setříděné mu je předáme,
3. pokud každou z 5 vybraných karet pouze zapíšeme a následně vrátíme do balíčku,
4. pokud provádíme výběr předchozím způsobem a zapsané karty navíc setřídíme?

Úloha 3. Los za 60 korun obsahuje deset políček, která postupně, v námi zvoleném pořadí, odkrýváme. Na dvou políčkách je znak **V** (výhra), na dvou políčkách je znak **P** (prohra) a na zbývajících šesti není nic. Pokud odkryjeme obě políčka se znakem **V** a žádné políčko se znakem **P**, vyhráváme 300 korun.

1. Jaká je pravděpodobnost výhry?
2. Je cena losu férová?

Úloha 4 (Problém rytíře de Méré[1])**.** Jaká je pravděpodobnost, že:

1. ve čtyřech hodech jednou hrací kostkou hodím alespoň jednou šestku?
2. ve dvaceti čtyřech hodech dvěmi hracími kostkami hodím alespoň jednou dvojici šestek?

2 Geometrická pravděpodobnost

Úloha 5. Tyč délky l se zcela náhodně rozpadne na tři části o délkách a, b, c. Jaká je pravděpodobnost, že z těchto částí sestavíme trojúhelník?

Úloha 6. Dva přátelé se rozhodli, že se sejdou mezi 9.00 a 10.00. Každý z nich je ale ochotný čekat nejvýše 10 minut.

1. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?
2. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají, pokud žádný z nich není ochotný čekat ani vteřinu?

Úloha 7. Na rovnoměrnou nekonečnou čtvercovou mřížku, kde vzdálenost průsečíků je dána jako a, hodíme minci o poloměru b, $b < \frac{a}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že mince zakryje některou z linek této mřížky?

Úloha 8. Na rovnoměrnou nekonečnou čtvercovou mřížku, kde vzdálenost průsečíků je dána jako a, hodíme minci o poloměru b, $b < \frac{a}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že mince zakryje (jeden) bod této mřížky?

3 Nezávislost jevů

Úloha 9. Pravděpodobnost, že během týdne ztratíme data uložená na počítači, je $P(P) = 0.003$. Pravděpodobnost, že během týdne ztratíme data uložená na záložním médiu, je $P(Z) = 0.001$.

1. Jaká je pravděpodobnost, že přijdeme o všechna data během jednoho týdne?
2. Jaká je pravděpodobnost, že přijdeme o všechna data během jednoho roku (52 týdny)?

Úloha 10. Na letišti je 10% zavazadel hlášeno jako poškozených, 5% jich má poškozený obsah a 3% jich je poškozených s poškozeným obsahem. Jsou tyto jevy nezávislé?

Úloha 11. Hodíme dvakrát mincí a uvažujeme tyto jevy:

- A ... na první minci padl líc,

[1] Antoine Gombaud, chevalier de Méré, 1607–1684, předpokládal, že řešení první otázky je $4 \cdot \frac{1}{6}$, a že řešení druhé otázky je $24 \cdot \frac{1}{36}$.

- B ... na druhé minci padl rub,
- C ... v obou hodech padly různé výsledky.

Určete, zda jsou jevy A, B a C nezávislé.

4 Řešení úloh

Řešení 1:

1. $\frac{(n-1)^k}{n^k}$
2. Všechny k-tice znaků abecedy S
3. Všechny k-tice znaků abecedy $S \setminus \{s\}$

Řešení 2: Snazší je spočítat doplňek pravděpodobnosti, že hráč neobdrží žádné eso.

1. $$1 - \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} = 1 - \frac{11\,793\,600}{24\,165\,120} \doteq 1 - 0,488\,04 \doteq 0,511\,96$$
2. $$1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} = 1 - \frac{\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = 1 - \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} \doteq 0,511\,96$$
3. $$1 - \frac{28 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 28}{32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32} = 1 - \frac{17\,210\,368}{33\,554\,432} \doteq 1 - 0,512\,91 \doteq 0,487\,09$$
4. $$1 - \frac{\binom{28+5-1}{5}}{\binom{32+5-1}{5}} = 1 - \frac{\binom{32}{5}}{\binom{36}{5}} = 1 - \frac{\frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = 1 - \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}$$
$$= 1 - \frac{24\,165\,120}{45\,239\,040} = 1 - 0,534\,17 = 0,465\,83$$

   (Tento poslední výsledek ale není správně, protože zda uvažujeme množinu elementárních jevů, které ale nejsou stejně pravděpodobné!)

Řešení 3:

- Prázdná políčka neuvažujeme
- Množina elementarních jevů Ω obsahuje všechna pořadí symbolů $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$.

- $|\Omega| = 4! = 24$
- Množina příznivých jevů A: všechny čtveřice, které obsahují dvě **V**éčka pred dvěma **P**éčkama
- $|A| = 2! \cdot 2! = 4$
- Šance na výhru: $P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- Střední hodnota výhry: $300 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} = 50$

  $\Rightarrow$ Cena losu férová není. Pokud bychom hráli mnohokrát, tratili bychom 10 korun na jednom losu.

Řešení 4:

1. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \doteq \quad 0,5177$
2. $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \quad \doteq \quad 0,4914$

Řešení 5: $\frac{1}{4}$
Řešení 6:

1. $1 - \frac{50^2}{60^2} = \frac{11}{36}$.
2. Nulová, ale je to jev možný.

Řešení 7: $1 - \frac{(a-2b)^2}{a^2}$
Řešení 8: $\frac{\pi b^2}{a^2}$
Řešení 9:

1. $P(P \cap Z) = P(P) \cdot P(Z) = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-6}$
2. $P(R) = 1 - (1 - 3 \cdot 10^{-6})^{52} \doteq 1,55988 \cdot 10^{-4}$

Řešení 10: Nejsou nezávislé, protože $0,1 \cdot 0,05 \neq 0,03$.
Řešení 11:

- $\Omega = \{(\text{líc}, \text{líc}), (\text{líc}, \text{rub}), (\text{rub}, \text{líc}), (\text{rub}, \text{rub})\}$
- $A = \{(\text{líc}, \text{líc}), (\text{líc}, \text{rub})\} \quad \ldots \quad P(A) = \frac{1}{2}$
- $B = \{(\text{líc}, \text{rub}), (\text{rub}, \text{rub})\} \quad \ldots \quad P(B) = \frac{1}{2}$
- $C = \{(\text{líc}, \text{rub}), (\text{rub}, \text{líc})\} \quad \ldots \quad P(C) = \frac{1}{2}$
- $A \cap B = \{(\text{líc}, \text{rub})\} \quad \ldots \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
  - Jevy A a B jsou nezávislé.
- $A \cap C = \{(\text{líc}, \text{rub})\} \quad \ldots \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4}$
  - Jevy A a C jsou nezávislé.

- $B \cap C = \{(\text{líc}, \text{rub})\} \quad \dots \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4}$
  - Jevy B a C jsou nezávislé.
- $A \cap B \cap C = \{(\text{líc}, \text{rub})\} \quad \dots \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
  - Jevy A, B a C <u>nejsou nezávislé</u>!