Pravděpodobnost a statistika

3. cvičení

(vytvořeno 15. října 2020)

1 Podmíněná pravděpodobnost

Úloha 1.

- Ω ... písmena anglické abecedy, $|\Omega| = 26$, 5 samohlásek
- S ... náhodně zvolené písmeno je samohláska
- A ... náhodně zvolené písmeno je písmeno `'a'`
- D ... náhodně zvolené písmeno patří do první desítky, tj., je to jedno z písmen: `'a'`, `'b'`, `'c'`, `'d'`, `'e'`, `'f'`, `'g'`, `'h'`, `'i'`, `'j'`

Určete tyto podmíněné pravděpodobnosti:

1. $P(A \mid S)$,
2. $P(A \mid D)$,
3. $P(S \mid D)$,
4. $P(D \mid S)$.

Úloha 2.

- Ω ... přirozená čísla od 1 do 12
- S ... náhodně zvolené číslo je sudé
- P ... náhodně zvolené číslo je nejvýše 5

Určete tyto podmíněné pravděpodobnosti:

1. $P(S \mid P)$,
2. $P(P \mid S)$.

Úloha 3.

- Ω ... přirozená čísla od 1 do 12
- D_2 ... náhodně zvolené číslo je dělitelné dvěma
- D_3 ... náhodně zvolené číslo je dělitelné třema
- D_4 ... náhodně zvolené číslo je dělitelné čtyřma

Určete tyto podmíněné pravděpodobnosti:

1. $P(D_2 \mid D_3)$,
2. $P(D_2 \mid D_4)$,
3. $P(D_3 \mid D_2)$,
4. $P(D_3 \mid D_4)$,
5. $P(D_4 \mid D_2)$,
6. $P(D_4 \mid D_3)$.

2 Věta o úplné pravděpodobnosti

Úplný systém jevů $\{B_j\}$

- Jevy B_j jsou po dvou neslučitelné.
- Sjednocení jevů B_j je jev jistý.
- Máme-li nějaký úplný systém jevů, potom máme jistotu, že vždy nastane právě jeden z nich.
- Pro každý jev A platí:

$$P(A) = \sum_j P(A \cap B_j)$$

Věta o úplné pravděpodobnosti

- Nechť $\{B_j\}$ je úplný systém jevů, z nichž každý má nenulovou pravděpodobnost.
- Potom pro každý jev A platí:

$$P(A) \quad = \quad \sum_j P(B_j) \cdot P(A \mid B_j)$$

Úloha 4. První zásilka obsahuje 150 kusů zboží a mezi nimi je 5 vadných. Druhá zásilka obsahuje 250 kusů zboží a mezi nimi je také 5 vadných. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme vadný kus,

1. pokud zásilky nejprve smícháme a potom vybereme jeden kus,
2. pokud nejprve vybereme zásilku a potom z ní jeden kus? (dvoustupňový výběr)

Úloha 5 (zdroj: `http://www.george11.eu/matematika/pst/Findex.htm`). Vězeň dostane šanci zachránit se před popravou. Dostane 12 bílých a 12 černých kuliček, které má rozmístit do dvou různých schránek (do každé z nich alespoň jednu). Žalářník potom vybere jednu schránku, z ní jednu kuličku a pokud bude bílá, vězeň je zachráněný. Jak může vězeň maximalizovat svoji naději na život?

3 Bayesova věta

- B_j ... spočetný úplný systém jevů s nenulovou pravděpodobností
- Pro každý jev A platí:

$$P(B_i \mid A) \quad = \quad \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum_j P(B_j) \cdot P(A \mid B_j)}$$

Úloha 6. Podíl nevyžádaných e-mailů je 30%. Pravděpodobnost označení nevyžádaného e-mailu jako spam je 95%. Pravděpodobnost označení „vyžádaného" e-mailu jako spam je 1%. Kolik je ve spamovém koši skutečně nevyžádaných e-mailů?

Úloha 7. Test nemoci je u 3% zdravých pacientů falešně pozitivní a u 12% nemocných pacientů falešně negativní. Nemocných v populaci je 5%.

- Kolik pacientů s pozitivním testem je skutečně nemocných?
- Kolik pacientů s negativním testem je skutečně zdravých?

Úloha 8. V domě naproti žije stará paní s množstvím zvířat, které, podle pozorování, tvoří z 50% kočky, z 25% psi a z 25% králíci. Zvířata mají buď černou nebo bílou srst; 50% koček, 80% psů a 50% králíků je bílých.

1. Z okna vypadlo bílé zvíře. Jaká je pravděpodobnost, že to byla kočka a tudíž pád z druhého patra přežila? (Paní do toho nepočítáme, protože víme, že nosí červený župan.)
2. Jakou část tvoří v domě bílá zvířata? (Paní do toho opět nepočítáme.)

Úloha 9. Vysílač vysílá znaky 0 a 1 přes zašumněný kanál. Pokud je vyslána 0, je s 10% pravděpodobností přijata jako 1. Pokud je vyslána 1, je s 15% pravdepodobnosti prijata jako 0. Jaká je pravděpodobnost, že přijatá 0 byla skutečně vyslána jako 0 a jaká je pravděpodobnost, že přijatá 1 byla skutečně vyslána jako 1, pokud

1. 0 je vysíláno třikrát více než 1,
2. 0 je vysíláno devětkrát více než 1?

4 Další úlohy

Úloha 10. Mějme

- $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,
- $\mathcal{A} = \Big\{\varnothing, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}\Big\}$,
- $P(A) = |A|$.

Je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ správně definovaný Kolmogorovův model pravděpodobnosti? Jaké náhodné veličiny můžeme na základě tohoto modelu definovat?

Úloha 11. Mějme

- $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$,
- $\mathcal{A} = \Big\{\{\alpha, \beta\}, \{\delta\}\Big\}$,
- $P(A) = \frac{1}{4} \cdot |A|$.

Je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ správně definovaný Kolmogorovův model pravděpodobnosti? Jaké náhodné veličiny můžeme na základě tohoto modelu definovat?

Úloha 12. O jevech A, B a C víme, že jsou vzájemně nezávislé a jejich pravděpodobnosti jsou

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,1, \\ P(B) &= 0,2, \\ P(C) &= 0,3. \end{aligned}$$

Určete pravděpodobnost jevů:

1. $A \cup (B \cap C)$,
2. $A \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$,
3. $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap C)$.

5 Řešení

Řešení 1:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \Omega &=& \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, & & & \\ & & n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}, & & & \\ A &=& \{a\}, & P(S) &=& \frac{1}{12} \\ S &=& \{a, e, i, o, u, y\}, & P(S) &=& \frac{6}{12} \\ P &=& \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, & P(D) &=& \frac{10}{12} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(A \mid S) &= \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{1/26}{6/26} = \frac{1}{6} \\ P(A \mid D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{1/26}{10/26} = \frac{1}{10} \\ P(S \mid D) &= \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{3/26}{10/26} = \frac{3}{10} \\ P(D \mid S) &= \frac{P(S \cap D)}{P(S)} = \frac{3/26}{6/26} = \frac{3}{6} \end{aligned}$$

Řešení 2:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}, & & \\
S &= \{2,4,6,8,10,12\}, & P(S) &= \tfrac{6}{12} \\
P &= \{1,2,3,4,5\}, & P(P) &= \tfrac{5}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S \mid P) &= \frac{P(S \cap P)}{P(P)} = \frac{2/12}{5/12} = \frac{2}{5} \\
P(P \mid S) &= \frac{P(P \cap S)}{P(S)} = \frac{2/12}{6/12} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Řešení 3:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}, & & \\
D_2 &= \{2,4,6,8,10,12\}, & P(D_2) &= \tfrac{6}{12} = \tfrac{1}{2}, \\
D_3 &= \{3,6,9,12\}, & P(D_3) &= \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}, \\
D_4 &= \{4,8,12\}, & P(D_4) &= \tfrac{3}{12} = \tfrac{1}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(D_2 \mid D_3) &= \frac{P(D_2 \cap D_3)}{P(D_3)} = \frac{2/12}{4/12} = \frac{1}{2} \\
P(D_3 \mid D_2) &= \frac{P(D_2 \cap D_3)}{P(D_2)} = \frac{2/12}{6/12} = \frac{1}{3} \\
P(D_2 \mid D_4) &= \frac{P(D_2 \cap D_4)}{P(D_4)} = \frac{3/12}{3/12} = 1 \\
P(D_4 \mid D_2) &= \frac{P(D_2 \cap D_4)}{P(D_2)} = \frac{3/12}{6/12} = \frac{1}{2} \\
P(D_3 \mid D_4) &= \frac{P(D_3 \cap D_4)}{P(D_4)} = \frac{1/12}{3/12} = \frac{1}{3} \\
P(D_4 \mid D_3) &= \frac{P(D_3 \cap D_4)}{P(D_3)} = \frac{1/12}{4/12} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Řešení 4:

1. $\frac{5+5}{150+250} = \frac{10}{400} = 0,025$
2. Jevy:
   - A ... vybereme vadný kus,
   - Z_1 ... vybereme první zásilku,
   - Z_2 ... vybereme druhou zásilku,

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \mid Z_1) \cdot P(Z_1) + P(A \mid Z_2) \cdot P(Z_2) \\
&= \frac{5}{150} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{250} \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{1500} \doteq 0,02\overline{6}
\end{aligned}
$$

Řešení 5:

- $A \ldots$ vybere bílou kuličku
- $U_1 \ldots$ vybere 1. urnu
- $U_2 \ldots$ vybere 2. urnu
- $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$
- $k \ldots$ počet bílých kuliček v 1. urně
- $n \ldots$ celkový počet kuliček v 1. urně
- $P(A \mid U_1) = \frac{k}{n}$
- $P(A \mid U_2) = \frac{12-k}{24-n}$

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(U_1) \cdot P(A \mid U_1) + P(U_2) \cdot P(A \mid U_2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12-k}{24-n} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} + \frac{12-k}{24-n} \right) \\
\text{maximum:} \quad P(A) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{11}{23} \right) \doteq 0,74
\end{aligned}
$$

Řešení 6:

- $N \ldots$ přijatý e-mail je nevyžádaný, $P(N) = 0,3$
- $S \ldots$ přijatý e-mail je označený jako spam
- $P(S \mid N) = 0,95$
- $P(S \mid \overline{N}) = 0,01$
- Zajímá nás $P(N \mid S)$

$$
\begin{aligned}
P(N \mid S) &= \frac{P(N) \cdot P(S \mid N)}{P(N) \cdot P(S \mid N) + P(\overline{N}) \cdot P(S \mid \overline{N})} \\
&= \frac{0,3 \cdot 0,95}{0,3 \cdot 0,95 + (1 - 0,3) \cdot 0,01} \\
&= \frac{0,285}{0,285 + 0,007} \doteq 0,97603
\end{aligned}
$$

Řešení 7:

- N ... pacient je nemocný, $P(N) = 0,05$
- P ... pacient má pozitivní výsledek testu
- $P(P \mid \overline{N}) = 0,03$
- $P(\overline{P} \mid N) = 0,12 \qquad \Rightarrow \qquad P(P \mid N) = 0,88$
- $P(N \mid P)$ ... pravděpodobnost, že pacient s pozitivním testem je nemocný
- $P(\overline{N} \mid \overline{P})$ ... pravděpodobnost, že pacient s negativním testem je zdravý

$$\begin{aligned}
P(N \mid P) &= \frac{P(N) \cdot P(P \mid N)}{P(N) \cdot P(P \mid N) + P(\overline{N}) \cdot P(P \mid \overline{N})} \\
&= \frac{0,05 \cdot 0,88}{0,05 \cdot 0,88 + (1 - 0,05) \cdot 0,03} \\
&= \frac{0,044}{0,044 + 0,0285} \;=\; 0,6069
\end{aligned}$$

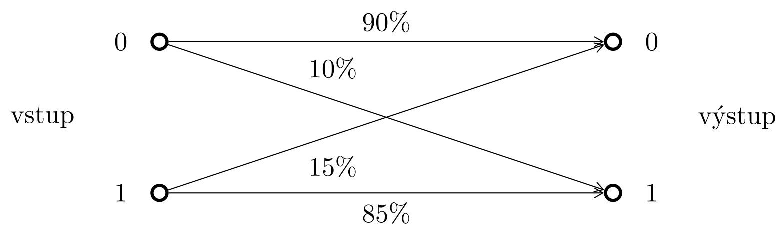
Řešení 8:

- K ... vypadlé zvíře je kočka, $P(K) = 0,5$
- P ... vypadlé zvíře je pes, $P(P) = 0,25$
- R ... vypadlé zvíře je králík, $P(R) = 0,25$
- B ... vypadlé zvíře má bílou srst
- $P(B \mid K) = 0,5$
- $P(B \mid P) = 0,8$
- $P(B \mid R) = 0,5$

1. $$\begin{aligned}
P(K \mid B) &= \frac{P(K) \cdot P(B \mid K)}{P(K) \cdot P(B \mid K) + P(P) \cdot P(B \mid P) + P(R) \cdot P(B \mid R)} \\
&= \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,5} \\
&= \frac{0,25}{0,25 + 0,2 + 0,125} \;=\; \frac{0,25}{0,575} \;=\; 0,43478
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
P(B) &= P(K) \cdot P(B \mid K) + P(P) \cdot P(B \mid P) + P(R) \cdot P(B \mid R) \\
&= 0,25 + 0,2 + 0,125 \;=\; 0,575
\end{aligned}$$

Řešení 9:



- $V0$ … vyslaný znak je 0
- $V1$ … vyslaný znak je 1
- $P0$ … přijatý znak je 0
- $P1$ … přijatý znak je 1
- $P(P0 \mid V0) = 0,9$
- $P(P1 \mid V0) = 0,1$
- $P(P0 \mid V1) = 0,15$
- $P(P1 \mid V1) = 0,85$

1. $$\begin{aligned} P(V0 \mid P0) &= \frac{P(V0)\cdot P(P0 \mid V0)}{P(V0)\cdot P(P0 \mid V0) + P(V1)\cdot P(P0 \mid V1)} \\ &= \frac{0,75\cdot 0,9}{0,75\cdot 0,9 + 0,25\cdot 0,15} = \frac{0,675}{0,675 + 0,0375} = 0,94737 \\ P(V1 \mid P0) &= 1 - 0,94737 = 0.052632 \\ P(V1 \mid P1) &= \frac{P(V1)\cdot P(P1 \mid V1)}{P(V0)\cdot P(P1 \mid V0) + P(V1)\cdot P(P1 \mid V1)} \\ &= \frac{0,25\cdot 0,85}{0,75\cdot 0,1 + 0,25\cdot 0,85} = \frac{0.2125}{0,075 + 0.2125} = 0.73913 \\ P(V0 \mid P1) &= 1 - 0.73913 = 0.26087 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} P(V0 \mid P0) &= \frac{P(V0)\cdot P(P0 \mid V0)}{P(V0)\cdot P(P0 \mid V0) + P(V1)\cdot P(P0 \mid V1)} \\ &= \frac{0,9\cdot 0,9}{0,9\cdot 0,9 + 0,1\cdot 0,15} = \frac{0,81}{0,81 + 0,015} = 0.98182 \\ P(V1 \mid P0) &= 1 - 0.98182 = 0.018182 \\ P(V1 \mid P1) &= \frac{P(V1)\cdot P(P1 \mid V1)}{P(V0)\cdot P(P1 \mid V0) + P(V1)\cdot P(P1 \mid V1)} \\ &= \frac{0,1\cdot 0,85}{0,9\cdot 0,1 + 0,1\cdot 0,85} = \frac{0.085}{0,09 + 0.085} = 0.48571 \\ P(V0 \mid P1) &= 1 - 0.48571 = 0.51429 \end{aligned}$$

Řešení 10: Není to správně vytvořený Kolmogorovův model, $\mathcal{A}$ netvoří σ-algebru. Aby $\mathcal{A}$ byla σ-algebru, museli bychom do ní přidat tyto množiny:

- $\{\alpha,\gamma\} \cap \{\alpha,\beta\} = \{\alpha\}$
- $\{\alpha,\gamma\} \cup \{\alpha,\beta\} = \{\alpha,\beta,\gamma\}$
- $\overline{\{\alpha,\beta\}} = \{\gamma\}$
- $\{\beta\} \cup \{\gamma\} = \{\beta,\gamma\}$

Museli bychom tedy mít

- $\mathcal{A} = \Big\{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}\Big\}$

Funkce P sice je míra, ale není to pravděpodobnostní míra, protože může nabývat hodnot větších než je 1. Pokud bychom měli například $P(A) = \frac{1}{3}\,|A|$, potom by to pravděpodobnostní míra byla.

Řešení 11: Systém množin $\mathcal{A}$ netvoří σ-algebru. Aby $\mathcal{A}$ byla σ-algebru, museli bychom do ní přidat tyto množiny:

- $\varnothing$
- $\overline{\varnothing} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$
- $\{\alpha,\beta\} \cup \{\delta\} = \{\alpha,\beta,\delta\}$
- $\overline{\{\alpha,\beta\}} = \{\gamma,\delta\}$
- $\overline{\{\delta\}} = \{\alpha,\beta,\gamma\}$
- $\{\gamma,\delta\} \cap \{\alpha,\beta,\gamma\} = \{\gamma\}$

Museli bychom tedy mít

- $\mathcal{A} = \Big\{\varnothing, \{\alpha,\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\delta\}, \{\gamma,\delta\}, \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}\Big\}$

Funkce P je správně navržená pravděpodobnostní míra.

Řešení 12:

$$\begin{array}{rrcl}
1. & P(A \cup (B \cap C)) & = & P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
 & & = & P(A) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
 & & = & 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \;\; = \;\; \mathbf{0,154} \\
2. & P(A \cup (\bar{A} \cap B \cap C)) & = & P(A) + P(\bar{A} \cap B \cap C) - P(A \cap \bar{A} \cap B \cap C) \\
 & & = & P(A) + P(\bar{A} \cap B \cap C) \\
 & & = & P(A) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
 & & = & 0,1 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \;\; = \;\; \mathbf{0,154} \\
3. & P((A \cup B) \cap (\bar{A} \cap C)) & = & P((A \cap \bar{A} \cap C) \cup (B \cap \bar{A} \cap C)) \\
 & & = & P(B \cap \bar{A} \cap C) \\
 & & = & P(B) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(C) \\
 & & = & 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 \;\; = \;\; \mathbf{0,054}
\end{array}$$