

Pravděpodobnost a statistika

4. cvičení

(vytvořeno 13. října 2020)

1 Náhodná veličina s diskrétním rozdělením

Úloha 1. Na zajíce, nezávisle na sobě, střílí starosta, myslivec a pytlák. Starosta se trefí s pravděpodobností 20%, myslivec se trefí s pravděpodobností 80% a pytlák se trefí s pravděpodobností 90%. Náhodná veličina X je počet zásahů do zajíce.

1. Určete její rozdělení pravděpodobnosti.
2. Určete pravděpodobnost nejvýše dvou zásahů: $P[X \leq 2]$.
3. Určete pravděpodobnost alespoň dvou zásahů: $P[X \geq 2]$.
4. Určete pravděpodobnost jednoho nebo dvou zásahů: $P[1 \leq X \leq 2]$.

Úloha 2. Královna rodí děti, dokud se nenarodí syn. Je ale svolná mít maximálně tři děti. Náhodná veličina X udává výsledný počet dětí v královské rodině. Určete rozdělení pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu X .

2 Náhodná veličina se spojitým rozdělením

Úloha 3. Náhodná veličina X popisuje dobu příchodu z úlohy o setkání (dotyčný přijde rovnoměrně pravděpodobně mezi 9.00 a 10.00).

1. Jaké rozdělení pravděpodobnosti bude mít náhodná veličina X .
2. Jaké rozdělení pravděpodobnosti bude mít náhodná veličina Y člověka, který přijde přesně v 9.30.

Úloha 4. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X je dáno hustotou pravděpodobnosti:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{pokud } x \in (0, 1) \\ 2 - x & \text{pokud } x \in (1, 2) \\ 0 & \text{pokud } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Určete distribuční funkci tohoto rozdělení.

Úloha 5. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X je dáno distribuční funkcí:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{4} & \text{pokud } x \in (0, 1) \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in (1, 2) \\ 1 & \text{pokud } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Určete hustotu pravděpodobnosti tohoto rozdělení.

3 Náhodná veličina se smíšeným rozdělením

Úloha 6. V pytli máme 20 čtyřstěnných a 5 šestistěnných hracích kostek. Jednu vybereme a hodíme. Jaké rozdělení pravděpodobnosti bude mít náhodná veličina X popisující hodnotu čísla, které na kostce padne?

Úloha 7. Generátor náhodných reálných čísel je naprogramován špatně. Měl by vracet rovnoměrně náhodně vybrané reálné číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, 20% vrácených hodnot ale tvoří rovnoměrně zastoupené 0 a 1. Jaké rozdělení pravděpodobnosti má náhodná veličina X popisující číslo vrácené generátorem.

Úloha 8. Náhodná veličina D je dána diskretním rozdělením pravděpodobnosti:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P[D = x]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$

Náhodná veličina S je dána spojitým rozdělením pravděpodobnosti:

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ 2x & \text{pokud } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{pokud } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $X = \text{Mix}_{(70\%, 30\%)}(D, S)$

Úloha 9. Distribuční funkce F_X náhodné veličiny X je definována předpisem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0), \\ 0.1x & \text{pokud } x \in (0, 1), \\ 0.4 & \text{pokud } x \in (1, 2), \\ 0.3x - 0.1 & \text{pokud } x \in (2, 3), \\ 1 & \text{pokud } x \in (3, \infty). \end{cases}$$

Určete diskretní a spojitou složku tohoto rozdělení pravděpodobnosti.

4 Řešení

Řešení 1:

x	0	1	2	3
$P[X = x]$	0,016	0,212	0,628	0,144

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ 0,016 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1) \\ 0,228 & \text{pokud } x \in \langle 1, 2) \\ 0,856 & \text{pokud } x \in \langle 2, 3) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

$$P[X \leq 2] = P[X \leq 2] = 0,856$$

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - \lim_{x \rightarrow 2^-} F_X(x) \\ = 1 - 0,228 = 0,772$$

$$P[1 \leq X \leq 2] = P[X \leq 2] - P[X < 1] = F_X(2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} F_X(x) \\ = 0,856 - 0,016 = 0,840$$

Řešení 2:

x	1	2	3
$P[X = x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2) \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 2, 3) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

Řešení 3:

$$1. f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 9) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 9, 10) \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 10, \infty) \end{cases}$$

$$1. F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 9) \\ x - 9 & \text{pokud } x \in \langle 9, 10) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 10, \infty) \end{cases}$$

$$2. F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty; 9, 5) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 9, 5; \infty) \end{cases}$$

Řešení 4:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Řešení 5:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{4} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Řešení 6:

$$X = \text{Mix}_{\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)}(S, C)$$

x	1	2	3	4	5	6
$P[S = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$P[C = x]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$P[Z = x]$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{7}{30} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{14}{30} & \text{pokud } x \in \langle 2, 3 \rangle \\ \frac{21}{30} & \text{pokud } x \in \langle 3, 4 \rangle \\ \frac{28}{30} & \text{pokud } x \in \langle 4, 5 \rangle \\ \frac{29}{30} & \text{pokud } x \in \langle 5, 6 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 6, \infty \rangle \end{cases}$$

Řešení 7:

$$X = \text{Mix}_{(20\%;80\%)}(D, S)$$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ 0,8x + 0,1 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

Řešení 8:

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{8} & \text{pokud } x \in \langle \frac{1}{4}, \frac{2}{4} \rangle \\ \frac{6}{8} & \text{pokud } x \in \langle \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle \frac{3}{4}, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ 0,3x^2 & \text{pokud } x \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle \\ 0,3x^2 + \frac{7}{80} & \text{pokud } x \in \langle \frac{1}{4}, \frac{2}{4} \rangle \\ 0,3x^2 + \frac{42}{80} & \text{pokud } x \in \langle \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \rangle \\ 0,3x^2 + 0,7 & \text{pokud } x \in \langle \frac{3}{4}, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

Řešení 9:

$$X = \text{Mix}_{(60\%,40\%)}(D, S)$$

x	1	2	3
$P[D = x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{4}{6} & \text{pokud } x \in \langle 2, 3 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{4} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \frac{1}{4} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} & \text{pokud } x \in \langle 2, 3 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{4} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 2, 3 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty \rangle \end{cases}$$