Pravděpodobnost a statistika

5. cvičení

(vytvořeno 27. října 2020)

1 Charakteristiky náhodné veličiny

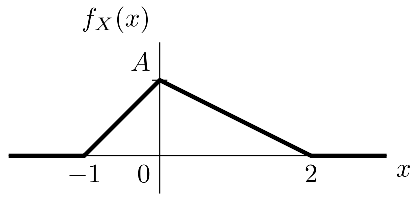
Úloha 1. Na zajíce, nezávisle na sobě, střílí starosta, myslivec a pytlák. Starosta se trefí s pravděpodobností 20%, myslivec se trefí s pravděpodobností 80% a pytlák se trefí s pravděpodobností 90%. Náhodná veličina X je počet zásahů do zajíce. Určete:

1. distribuční funkci,
2. kvantilovou funkci,
3. medián,
4. dolní kvartil,
5. horní kvartil,
6. střední hodnotu,
7. rozptyl,
8. směrodatnou odchylku.

Úloha 2. Královna rodí děti, dokud se nenarodí syn. Je ale svolná mít maximálně tři děti. Náhodná veličina X udává výsledný počet dětí v královské rodině. Určete:

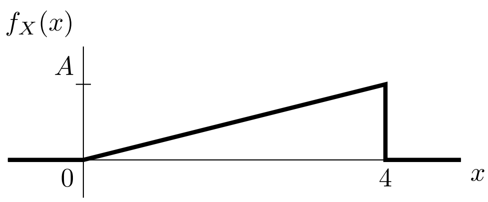
1. distribuční funkci,
2. kvantilovou funkci,
3. medián,
4. dolní kvartil,
5. horní kvartil,
6. střední hodnotu,
7. rozptyl,
8. směrodatnou odchylku.

Úloha 3. Rozdělení spojité náhodné veličiny X je popsáno hustotou pravděpodobnosti f_X, která má následující graf:



1. Určete hodnotu konstanty $A \in \mathbb{R}$.
2. Popište distribuční funkci.
3. Popište kvantilovou funkci.
4. Určete medián, dolní a horní kvartil.
5. Určete střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Úloha 4. Rozdělení spojité náhodné veličiny X je popsáno hustotou pravděpodobnosti f_X, která má následující graf:



1. Určete hodnotu konstanty $A \in \mathbb{R}$.
2. Popište distribuční funkci.
3. Popište kvantilovou funkci.
4. Určete medián, dolní a horní kvartil.
5. Určete střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Úloha 5 (Petrohradský paradox, Daniel Bernoulli, 1738)**.** Hra spočívá v házení mincí tak dlouho, dokud nepadne líc.

- Pokud padne líc v prvním hodu, vyhrajeme 2 korunu.
- Pokud padne líc v druhém hodu, vyhrajeme 4 koruny.
- Pokud padne líc ve třetím hodu, vyhrajeme 8 korun.
- Pokud padne líc ve k-tém hodu, vyhrajeme 2^k korun.

Jaká je střední hodnota výhry? Kolik se vyplatí vsadit?

2 Základní typy diskrétních rozdělení

Diracovo rozdělení

- $a \in \mathbb{R}$
- $P[X = a] = 1$
- F_X ...jednotkový skok v bodě a
- $\mathrm{E}X = a$
- $\mathrm{D}X = 0$

Alternativní rozdělení

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $P[X = a] = q$, $P[X = b] = 1 - q$
- $\mathrm{E}X = q \cdot a + (1 - q) \cdot b$
- $\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 = q \cdot a^2 + (1 - q) \cdot b^2 - \Big(q \cdot a + (1 - q) \cdot b\Big)^2$
  $= q \cdot (1 - q) \cdot (a - b)^2$

Rovnoměrné rozdělení

- $X \in \{1, 2, \dots, m\}$
- $P[X = 1] = P[X = 2] = \dots = P[X = m] = \frac{1}{m}$
- $\mathrm{E}X = \frac{m+1}{2}$
- $\mathrm{D}X = \frac{m^2-1}{12}$

Úloha 6 (Rovnoměrné rozdělení)**.** Hodíme šestistěnnou kostkou, náhodná veličina X udává počet teček na horní straně kostky.

Binomické rozdělení, Bi(m, q)

- Provedeme sérii $m \in \mathbb{N}$ nezávislých pokusů se stejným alternativním rozdělením s pravděpodobností úspěchu $q \in \langle 0, 1\rangle$.
- Náhodná veličina X odpovídá počtu úspěchů.
- $P[X = x] = \binom{m}{x} q^x (1 - q)^{m-x}$
- $\mathrm{E}X = mq$
- $\mathrm{D}X = mq(1 - q)$

Úloha 7 (Binomické rozdělení)**.** Hodíme čtyřmi čtyřstěnnými kostkami. Náhodná veličina X je počet jedniček, které padly. Určete její rozdělení pravděpodobnosti.

Úloha 8 (Binomické rozdělení)**.** Pošleme zprávu, která obsahuje 2000 znaků. U každého znaku je $q = 10^{-3}$ šance, že bude přenesný chybně. Náhodná veličina X udává počet chyb ve zprávě. Určete její rozdělení pravděpodobnosti.

Úloha 9 (Binomické rozdělení)**.** Hodíme čtyřmi mincemi. Náhodná veličina X udává počet líců. Určete její rozdělení pravděpodobnosti.

Úloha 10 (Binomické rozdělení)**.** Na statku mají 200 slepic, každá snese během týdne 5 vajec. Při sběru vajec je u každého pravděpodobnost $1,5\%$, že se rozbije. Jaké je pravděpodobnostní rozdělení počtu rozbitých vajec během jednoho týdne?

Poissonovo rozdělení, Po(λ)

- Aproximace binomického rozdělení pro velké m a malé q.
- Namísto počtu pokusů a pravděpodobnosti úspěchu u každého z nich potřebujeme zde mít zadánu, jako parametr, střední hodnotu $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $P[X = x] = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}$
- $\mathrm{E}X = \lambda$
- $\mathrm{D}X = \lambda$

Úloha 11 (Poissonovo rozdělení)**.** Na statku mají mnoho slepic, které během týdne snesou mnoho vajec. Počet rozbitých vajec se řídí Poissonovým rozdělením a během jednoho týdne se jich rozbije průměrně 15. Vypočítejte pravděpodobnosti pro stejné jevy jako v Úloze 10.

Úloha 12 (Poissonovo rozdělení)**.** Do restaurace přijde během jedné hodiny průměrně 30 hostů. Jaká je pravděpodobnost, že během pěti minut nikdo nepřijde? Jaká je pravděpodobnost, že během pěti minut přijdou právě dva hosté?

Geometrické rozdělení

- Provádíme nezávislé pokusy se stejným alternativním rozdělením s pravděpodobností neúspěchu $q \in \langle 0, 1\rangle$ až do prvního úspěchu.
- Náhodná veličina X odpovídá počtu neúspěchů do prvního úspěchu.
- $P[X = x] = q^x(1 - q)$
- $\mathrm{E}X = \frac{q}{1-q}$
- $\mathrm{D}X = \frac{q}{(1-q)^2}$

Úloha 13 (Geometrické rozdělení)**.** Zdislav počítá ovečky, které po jedné přechází přes lávku. Při každé ovečce je 20% šance, že Zdislav usne. Jaká je pravděpodobnost, že Zdislav usne při první ovečce? Jaká je pravděpodobnost, že Zdislav usne při páté ovečce? Jaká je pravděpodobnost, že Zdislav nikdy neusne? Kolik oveček je potřeba, abychom se mohli na 99% spolehnout, že Zdislav bude spát?

Hypergeometrické rozdělení

- Mezi M výrobky je K vadných.
- Vybereme m výrobků.
- Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude x vadných?
- $P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{m-x}}{\binom{M}{m}}$
- $\mathrm{E}X = \frac{mK}{M}$
- $\mathrm{D}X = \frac{mK(M-K)(M-m)}{M^2(M-1)}$

Řešení

Řešení 1:

x	0	1	2	3
$P[X = x]$	$0,016$	$0,212$	$0,628$	$0,144$

1.
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ 0,016 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1) \\ 0,228 & \text{pokud } x \in \langle 1, 2) \\ 0,856 & \text{pokud } x \in \langle 2, 3) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

2.
$$q_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in \langle 0; 0,016) \\ 0,5 & \text{pokud } x = 0,016 \\ 1 & \text{pokud } x \in (0,016; 0,228) \\ 1,5 & \text{pokud } x = 0,228 \\ 2 & \text{pokud } x \in (0,228; 0,856) \\ 2,5 & \text{pokud } x = 0,856 \\ 3 & \text{pokud } x \in (0,856; 1\rangle \end{cases}$$

3. $q_X(0,5) = 2$

4. $q_X(0,25) = 2$

5. $q_X(0,75) = 2$

6. $\mathrm{E}X = 0 \cdot 0,016 + 1 \cdot 0,212 + 2 \cdot 0,628 + 3 \cdot 0,144 = 1,9$

7.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}X &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 = \left(\sum x^2 \, P\left[X = x\right]\right) - (\mathrm{E}X)^2 \\ &= \left(0^2 \cdot 0,016 + 1^2 \cdot 0,212 + 2^2 \cdot 0,628 + 3^2 \cdot 0,144\right) - (1,9)^2 \\ &= 4,02 - 3.61 = 0,41 \end{aligned}$$

8. $\sigma_X = \sqrt{0,41} \doteq 0,64031$

Řešení 2:

x	1	2	3
$P\left[X = x\right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

1.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2) \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 2, 3) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

2.

$$q_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right) \\ 1,5 & \text{pokud } x = \frac{1}{2} \\ 2 & \text{pokud } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ 2,5 & \text{pokud } x = \frac{3}{4} \\ 3 & \text{pokud } x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right\rangle \end{cases}$$

3. $q_X(0,5)$ je jakékoliv číslo mezi 1 a 2, například 1,5

4. $q_X(0,25) = 1$

5. $q_X(0,75)$ je jakékoliv číslo mezi 2 a 3, například 2,5

6. $\mathrm{E}X = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1,75$

7.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}X &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 = \left(\sum x^2 \, P\left[X = x\right]\right) - (\mathrm{E}X)^2 \\ &= \left(1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4}\right) - (1,75)^2 = \frac{11}{16} = 0,6875 \end{aligned}$$

8. $\sigma_X = \sqrt{\frac{11}{16}} \doteq 0,82916$

Řešení 3:

1. $A = \frac{2}{3}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{pokud } x \in \langle -1, 0) \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{pokud } x \in \langle 0, 2) \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{3}(x+1)^2 & \text{pokud } x \in \langle -1, 0) \\ -\frac{1}{6}(x-2)^2 + 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, 2) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

3.

$$q_X(x) = \begin{cases} \sqrt{3x} - 1 & \text{pokud } x \in \left\langle 0, \frac{1}{3} \right) \\ 2 - \sqrt{6 - 6x} & \text{pokud } x \in \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right\rangle \end{cases}$$

4. $q_X(0,5) = 2 - \sqrt{3}, \quad q_X(0,25) = \sqrt{0,75} - 1, \quad q_X(0,75) = 2 - \sqrt{1,5}$

5. $\mathrm{E}X = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{D}X = \frac{7}{18}, \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{7}{18}}$

Řešení 4:

1. $A = \frac{1}{2}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{8} & \text{pokud } x \in \langle 0, 4\rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{16} & \text{pokud } x \in \langle 0, 4) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$

3. $q_X(x) = 4\sqrt{x}$

4. $q_X(0,5) = 4\sqrt{0,5}, \quad q_X(0,25) = 4\sqrt{0,25}, \quad q_X(0,75) = 4\sqrt{0,75}$

5. $\mathrm{E}X = \frac{8}{3}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}X &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 = \int_0^4 x^2 f_X(x)\mathrm{d}x - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \\ &= 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}, \end{aligned}$$

$\sigma_X = \sqrt{\frac{8}{9}}$

Řešení 5:

- A_k ... padne $(k-1)$-krát rub a potom líc
- Ω ... množina posloupností rubů zakončených jedním lícem
- $|\Omega| = \infty$

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \frac{1}{2^k} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} &= 1 \end{aligned}$$

- náhodná veličina X je velikost výhry

$$\begin{aligned} P[X=2] &= \frac{1}{2} \\ P[X=4] &= \frac{1}{4} \\ P[X=8] &= \frac{1}{8} \\ P\left[X=2^k\right] &= \frac{1}{2^k} \\ \mathrm{E}X &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \infty \end{aligned}$$

Řešení 7:

- $P[X=x] = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x} = \binom{4}{x} \cdot \frac{3^{4-x}}{4^4}$
- $\mathrm{E}X = 0 \cdot \frac{81}{256} + 1 \cdot \frac{108}{256} + 2 \cdot \frac{54}{256} + 3 \cdot \frac{12}{256} + 4 \cdot \frac{1}{256} = 1$
- $\mathrm{E}X = mq = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$
- $\mathrm{D}X = mq(1-q) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

x	0	1	2	3	4
$P[X=x]$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

Řešení 8:

- $P[X=x] = \binom{2000}{x} \cdot \left(10^{-3}\right)^x \cdot \left(1-10^{-3}\right)^{2000-x}$
- $\mathrm{E}X = mq = 2000 \cdot 10^{-3} = 2$
- $\mathrm{D}X = mq(1-q) = 2000 \cdot 10^{-3} \cdot (1-10^{-3}) = 2 \cdot (1-10^{-3})$

Řešení 9:

- $P[X=x] = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} = \binom{4}{x} \cdot \frac{1}{16}$
- $\mathrm{E}X = mq = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$
- $\mathrm{D}X = mq(1-q) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

x	0	1	2	3	4
$P[X=x]$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Řešení 10:

- $P[X=x] = \binom{1000}{x} \cdot 0,015^x \cdot 0,985^{1000-x}$
- $\mathrm{E}X = 1000 \cdot 0,015 = 15$
- $\mathrm{D}X = 15 \cdot 0,985 \doteq 14,775$
- $P[X=0] = \binom{1000}{0} \cdot 0,015^0 \cdot 0,985^{1000} \doteq 2,73 \cdot 10^{-7}$
- $P[X=1] = \binom{1000}{1} \cdot 0,015^1 \cdot 0,985^{999} \doteq 4,15 \cdot 10^{-6}$
- $P[X=10] = \binom{1000}{10} \cdot 0,015^{10} \cdot 0,985^{990} \doteq 0,0482$
- $P[X=15] = \binom{1000}{15} \cdot 0,015^{15} \cdot 0,985^{985} \doteq 0,1032$

Řešení 11:

- $P[X=x] = \frac{15^x}{x!}\mathrm{e}^{-15}$
- $P[X=0] = \frac{15^0}{0!}\mathrm{e}^{-15} \doteq 2,059 \cdot 10^{-7}$
- $P[X=1] = \frac{15^1}{1!}\mathrm{e}^{-15} \doteq 4,5885 \cdot 10^{-6}$
- $P[X=10] = \frac{15^1 0}{10!}\mathrm{e}^{-15} \doteq 0,0486$
- $P[X=15] = \frac{15^1 5}{15!}\mathrm{e}^{-15} \doteq 0,1024$

Řešení 12:

- $\lambda = 30 \cdot \frac{5}{60} = \frac{5}{2} = 2,5$
- $P[X=0] = \frac{2,5^0}{0!}\mathrm{e}^{-2,5} \doteq 0,082$
- $P[X=2] = \frac{2,5^2}{2!}\mathrm{e}^{-2,5} \doteq 0,2565$

Řešení 13:

- $P[X=x] = 0,8^x \cdot 0,2$
- $P[X=0] = 0,8^0 \cdot 0,2 = 0,2$
- $P[X=4] = 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,8^4 \cdot 0,2$

- $\mathrm{E}X = \frac{0,8}{1-0,8} = 4$

- $F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=0}^{x} 0,8^x \cdot 0,2 = 0,2 \cdot \frac{1-0,8^{x+1}}{1-0,8} = 1 - 0,8^{x+1}$

$$
\begin{aligned}
P[X \leq x] &\geq 0,99 \\
F_X(x) &\geq 0,99 \\
1 - 0,8^{x+1} &\geq 0,99 \\
0,8^{x+1} &\geq 0,01 \\
(x+1)\log 0,8 &\geq \log 0,01 \\
x+1 &\geq \frac{-2}{\log 0,8} \\
x+1 &\geq 20,64
\end{aligned}
$$