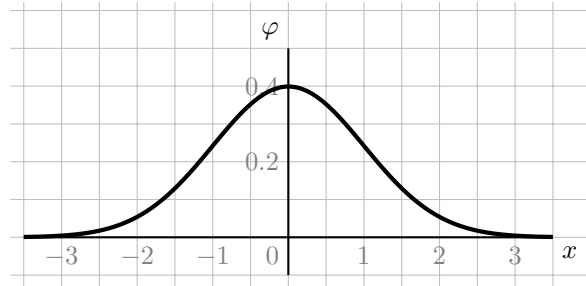


Pravděpodobnost a statistika

6. cvičení

(vytvořeno 28. listopadu 2020)

1 Normální (Gaussovo) rozdělení



$$\begin{aligned} \text{normované:} \quad \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x^2}{2} \\ \text{nenormované:} \quad f_X(x) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

Úloha 1 (normované normální rozdělení). Chyba při měření fyzikální veličiny má normované normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$.

1. Jaká je pravděpodobnost, že chyba bude menší než 0.5?
2. Jaká je pravděpodobnost, že chyba bude menší než -0.5 ?
3. Jaká je pravděpodobnost, že chyba bude v rozmezí od -0.5 do 0.5 ?
4. V jakém intervalu se chyba bude pohybovat s 95% pravděpodobností?

Úloha 2. Životnost páru bot modelujeme normálním rozdělením s parametry $\mu = 12$ měsíců, $\sigma^2 = 4$ měsíce². Jaká je pravděpodobnost, že se boty rozbijí během 15 měsíců?

Úloha 3. Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu = 15$ a $\sigma^2 = 16$. Určete:

1. $P[10 \leq X \leq 17]$,
2. interval 90% spolehlivosti.

Úloha 4. Náhodná veličina X popisující počet bodů získaný z přijímacího testu má normální rozdělení s parametry $\mu = 500$ a $\sigma^2 = 100^2$. Víme, že na základě bodů z tohoto testu bylo přijato 70% uchazečů. Kolik bodů stačilo k přijetí?

2 Operace s náhodnými veličinami

Úloha 5. U náhodných veličin X a Y známe střední hodnoty a rozptyly:

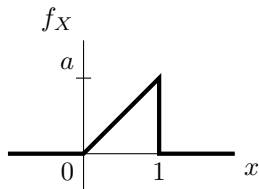
$$EX = 4, \quad EY = 7, \quad DX = 5, \quad DY = 2.$$

Co lze říct (a za jakých podmínek) o střední hodnotě a rozptylu náhodných veličin:

1. $U = 5 - 3X$,
2. $V = 2X - Y + 3$,

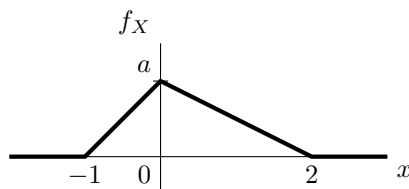
3. $W = 2XY$?

Úloha 6. Rozdělení spojité náhodné veličiny X je popsáno hustotou pravděpodobnosti f_X , která má následující graf:



1. Určete hodnotu konstanty $a \in \mathbb{R}$ a rozdělení náhodné veličiny X .
2. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = X + 3$.
3. Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = 2 \cdot X$.
4. Určete rozdělení náhodné veličiny $U = -X$.
5. Určete rozdělení náhodné veličiny $W = X^2$.

Úloha 7. Rozdělení spojité náhodné veličiny X je popsáno hustotou pravděpodobnosti f_X , která má následující graf:



1. Určete hodnotu konstanty $a \in \mathbb{R}$ a rozdělení náhodné veličiny X .
2. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = X + 2$.
3. Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = 3 \cdot X$.
4. Určete rozdělení náhodné veličiny $U = -X$.
5. Určete rozdělení náhodné veličiny $V = |X|$.
6. Určete rozdělení náhodné veličiny $W = X^2$.

Úloha 8. Rozdělení diskrétní náhodné veličiny X je popsáno pravděpodobnostní funkcí:

x	-1	1	2
$P[X = x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

1. Určete distribuční funkci náhodné veličiny X .
2. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = X - 1$.
3. Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = 3 \cdot X$.
4. Určete rozdělení náhodné veličiny $U = -X$.
5. Určete rozdělení náhodné veličiny $V = |X|$.
6. Určete rozdělení náhodné veličiny $W = X^2$.

Řešení

Řešení 1:

1. $P[X \leq 0.5] = \Phi(0.5) \doteq 0.6915$
2. $P[X \leq -0.5] = \Phi(-0.5) = 1 - P[X \leq 0.5] \doteq 1 - 0.6915 \doteq 0.3085$
3. $P[-0.5 \leq X \leq 0.5] = P[X \leq 0.5] - P[X \leq -0.5] = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) \doteq 0.6915 - 0.3085 \doteq 0.383$
4. Na tuto otázku lze odpovědět více způsoby:
 - (a) horní jednostranný interval: $(-\infty, \Phi^{-1}(0.95)) = (-\infty, 1.645)$
 - (b) dolní jednostranný interval: $(\Phi^{-1}(0.05), \infty) = (-\Phi^{-1}(0.95), \infty) = (-1.645, \infty)$
 - (c) (symetrický) oboustranný interval: $(\Phi^{-1}(0.025), \Phi^{-1}(0.975)) = (-\Phi^{-1}(0.975), \Phi^{-1}(0.975)) = (-1.96, 1.96)$

Řešení 2:

$$P[X \leq 15] = P\left[\frac{X - 12}{2} \leq \frac{15 - 12}{2}\right] = P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{3}{2}\right] = \Phi(1.5) \doteq 0.9332$$

Řešení 3:

$$\begin{aligned} P[10 \leq X \leq 17] &= P[X \leq 17] - P[X < 10] \\ &= P\left[\frac{X - 15}{\sqrt{16}} \leq \frac{17 - 15}{\sqrt{16}}\right] - P\left[\frac{X - 15}{\sqrt{16}} < \frac{10 - 15}{\sqrt{16}}\right] \\ &= P\left[\text{norm}X \leq \frac{2}{4}\right] - P\left[\text{norm}X < -\frac{5}{4}\right] \\ &= \Phi(0.5) - \lim_{x \rightarrow -1.25^-} \Phi(x) = \Phi(0.5) - \Phi(-1.25) = \Phi(0.5) - (1 - \Phi(1.25)) \\ &= \Phi(0.5) + \Phi(1.25) - 1 \doteq 0.6915 + 0.8944 - 1 = 0.5859 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[X \leq x] &= 0.9 \\ P\left[\frac{X - 15}{\sqrt{16}} \leq \frac{x - 15}{\sqrt{16}}\right] &= 0.9 \\ \Phi\left(\frac{x - 15}{4}\right) &= 0.9 \\ \frac{x - 15}{4} &= \Phi^{-1}(0.9) \\ x &= 4\Phi^{-1}(0.9) + 15 \\ x &= 4 \cdot 1.282 + 15 = 20.128 \end{aligned}$$

horní jednostranný interval: $(-\infty, 20.128)$

$$\begin{aligned} P[X \leq x] &= 0.1 \\ P\left[\frac{X - 15}{\sqrt{16}} \leq \frac{x - 15}{\sqrt{16}}\right] &= 0.1 \\ \Phi\left(\frac{x - 15}{4}\right) &= 0.1 \\ \frac{x - 15}{4} &= \Phi^{-1}(0.1) \\ x &= 4\Phi^{-1}(0.1) + 15 \\ x &= -4\Phi^{-1}(0.9) + 15 \\ x &= -4 \cdot 1.282 + 15 = 9.872 \end{aligned}$$

dolní jednostranný interval: $(9.872, \infty)$

$$\begin{aligned}
P[X \leq x] &= 0.05 \\
P\left[\frac{X-15}{\sqrt{16}} \leq \frac{x-15}{\sqrt{16}}\right] &= 0.05 \\
\Phi\left(\frac{x-15}{4}\right) &= 0.05 \\
x &= 4\Phi^{-1}(0.05) + 15 \\
x &= -4\Phi^{-1}(0.95) + 15 \\
x &= -4 \cdot 1.645 + 15 = 8.42 \\
P[X \leq x] &= 0.95 \\
P\left[\frac{X-15}{\sqrt{16}} \leq \frac{x-15}{\sqrt{16}}\right] &= 0.95 \\
\Phi\left(\frac{x-15}{4}\right) &= 0.95 \\
x &= 4\Phi^{-1}(0.95) + 15 \\
x &= 4 \cdot 1.645 + 15 = 21.58
\end{aligned}$$

oboustranný interval: $\langle 8.42, 21.58 \rangle$

Řešení 4:

$$\begin{aligned}
P[X \geq x] &= 0.7 \\
P[X \leq x] &= 0.3 \\
P\left[\frac{X-500}{100} \leq \frac{x-500}{100}\right] &= 0.3 \\
\Phi\left(\frac{x-500}{100}\right) &= 0.3 \\
x &= 100\Phi^{-1}(0.3) + 500 \\
x &= -100\Phi^{-1}(0.7) + 500 \\
x &= -100 \cdot 0.524 + 500 = 447.6
\end{aligned}$$

K přijetí stačilo 448 bodů.

Řešení 5:

1.

$$\begin{aligned}
EU &= E(5 - 3X) = E5 - 3EX = 5 - 3 \cdot 4 = -7 \\
DU &= D(5 - 3X) = D(-3X) = (-3)^2 \cdot DX = 9 \cdot 5 = 45
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
EV &= E(2X - Y + 3) = 2EX - EY + E3 = 2 \cdot 4 - 7 + 3 = 4 \\
DV &= D(2X - Y + 3) = 2^2 \cdot DX + (-1)^2 DY = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 22 \\
&\quad (\text{pouze, pokud jsou } X \text{ a } Y \text{ nezávislé}) \\
DV &= 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \operatorname{cov}(X, Y) \\
\operatorname{cov}(X, Y) &= E(X \cdot Y) - EX \cdot EY = E\left((X - EX) \cdot (Y - EY)\right)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
EW &= E(2XY) = 2 \cdot EX \cdot EY = 2 \cdot 4 \cdot 7 = 56 \\
&\quad (\text{pouze, pokud jsou } X \text{ a } Y \text{ nezávislé})
\end{aligned}$$

Řešení 6:

1.

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ f_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ 2x & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in (1, \infty) \end{cases} \\ F_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in (1, \infty) \end{cases} \\ q_X(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

2. $F_Y(x) = P[Y \leq x] = P[X + 3 \leq x] = P[X \leq x - 3] = F_X(x - 3)$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 3) \\ (x - 3)^2 & \text{pokud } x \in \langle 3, 4 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases} \\ f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 3) \\ 2x - 6 & \text{pokud } x \in \langle 3, 4 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases} \\ q_Y(x) &= \sqrt{x} + 3 \end{aligned}$$

3. $F_Z(x) = P[Z \leq x] = P[2 \cdot X \leq x] = P[X \leq \frac{x}{2}] = F_X(\frac{x}{2})$

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{4} & \text{pokud } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases} \\ f_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{2} & \text{pokud } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases} \\ q_Z(x) &= 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

4. $F_U(x) = P[U \leq x] = P[-X \leq x] = P[X \geq -x] = 1 - P[X < -x] = 1 - \lim_{u \rightarrow -x^-} F_X(u) = 1 - F_X(-x)$ (poslední krok úpravy je možný díky spojitosti funkce F_X)

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ 1 - x^2 & \text{pokud } x \in \langle -1, 0 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \\ f_U(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ -2x & \text{pokud } x \in \langle -1, 0 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \\ q_U(x) &= -\sqrt{x} \end{aligned}$$

5. $F_W(x) = P[W \leq x] = P[X^2 \leq x] = P[X \geq \sqrt{x}] = F_X(\sqrt{x})$

$$\begin{aligned} F_W(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases} \\ f_W(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases} \\ q_U(x) &= \sqrt{x^2} = x \end{aligned}$$

Řešení 7:

1. Určete hodnotu konstanty $a \in \mathbb{R}$ a rozdělení náhodné veličiny X .

$$a = \frac{2}{3}$$

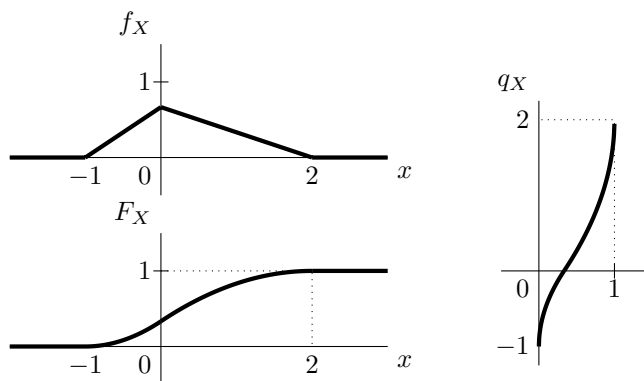
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{pokud } x \in \langle -1, 0 \rangle \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{pokud } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{3}(x+1)^2 & \text{pokud } x \in \langle -1, 0 \rangle \\ -\frac{1}{6}(x-2)^2 + 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$q_X(x) = \begin{cases} \sqrt{3x} - 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 2 - \sqrt{6 - 6x} & \text{pokud } x \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{3}$$

$$DX = \frac{7}{18}$$



2. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = X + 2$.

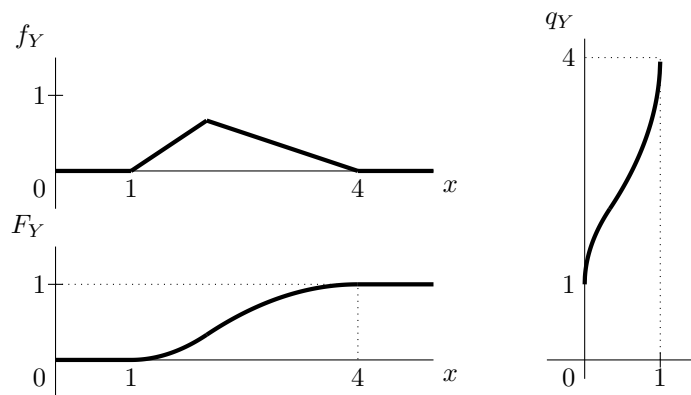
$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{3}(x-1)^2 & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ -\frac{1}{6}(x-4)^2 + 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, 4 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{2}{3}(x-1) & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ -\frac{2}{6}(x-4) & \text{pokud } x \in \langle 2, 4 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases}$$

$$q_Y(x) = \begin{cases} \sqrt{3x} + 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 4 - \sqrt{6 - 6x} & \text{pokud } x \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$EY = \frac{7}{3}$$

$$DY = \frac{7}{18}$$



3. Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = 3 \cdot X$.

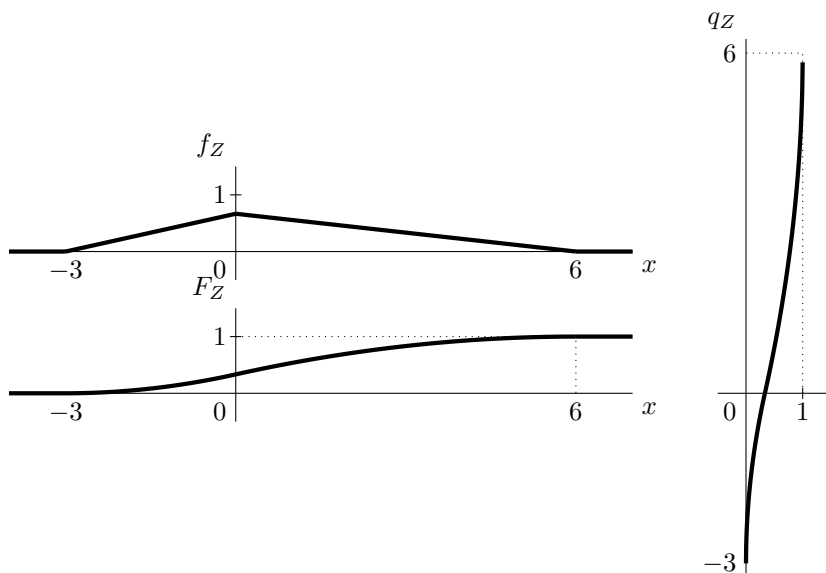
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2 & \text{pokud } x \in \langle -3, 0 \rangle \\ -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}x - 2\right)^2 + 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, 6 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 6, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}x + 1\right) & \text{pokud } x \in \langle -3, 0 \rangle \\ -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}x - 2\right) & \text{pokud } x \in \langle 0, 6 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 6, \infty \rangle \end{cases}$$

$$q_Z(x) = \begin{cases} 3\sqrt{3x} - 3 & \text{pokud } x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 6 - 3\sqrt{6 - 6x} & \text{pokud } x \in \langle \frac{1}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$EZ = \frac{1}{2}$$

$$DZ = \frac{7}{2}$$



4. Určete rozdělení náhodné veličiny $U = -X$.

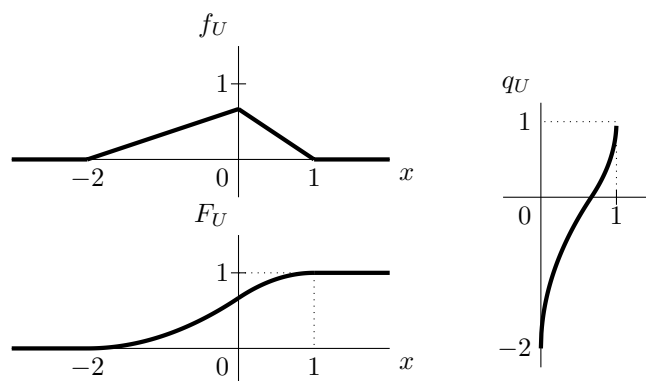
$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in \langle -\infty, -2 \rangle \\ \frac{1}{6}(x+2)^2 & \text{pokud } x \in \langle -2, 0 \rangle \\ 1 - \frac{1}{3}(1-x)^2 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in \langle -\infty, -2 \rangle \\ \frac{1}{3}(x+2) & \text{pokud } x \in \langle -2, 0 \rangle \\ \frac{2}{3}(1-x) & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$q_U(x) = \begin{cases} \sqrt{6x} - 2 & \text{pokud } x \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle \\ 1 - \sqrt{3-3x} & \text{pokud } x \in \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$EU = -\frac{1}{3}$$

$$DU = \frac{7}{18}$$



5. Určete rozdělení náhodné veličiny $V = |X|$.

$$X = \text{Mix}_{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}(Z, K)$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ 2x + 2 & \text{pokud } x \in \langle -1, 0 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ x^2 + 2x + 1 & \text{pokud } x \in \langle -1, 0 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$f_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{x}{2} + 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{x^2}{4} + x & \text{pokud } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$V = |X| = \text{Mix}_{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}(-Z, K)$$

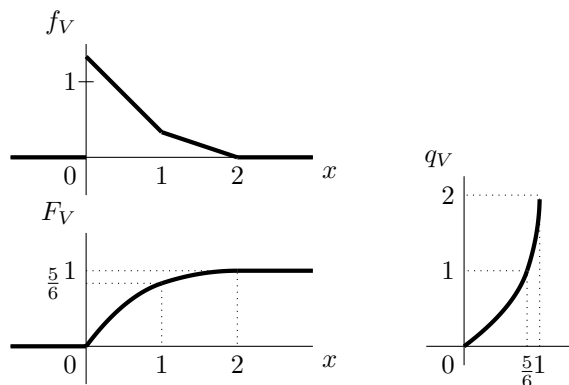
$$F_{-Z}(x) = 1 - F_Z(-x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ -x^2 + 2x & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_V(x) = \frac{1}{3} \cdot F_{-Z}(x) + \frac{2}{3} \cdot F_K(x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ -\frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

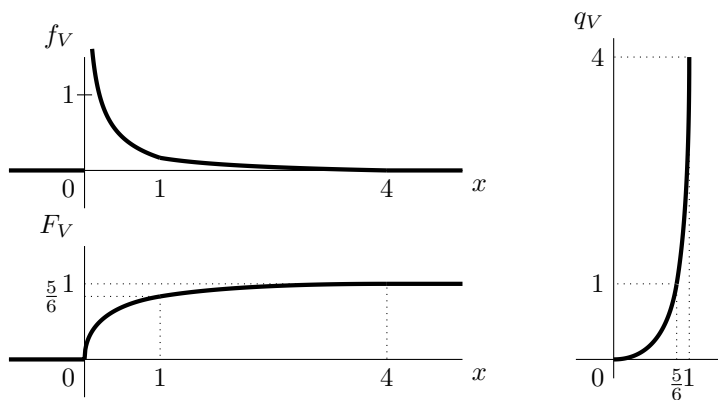
$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ -x + \frac{4}{3} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$q_V(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{16 - 18x}}{3} & \text{pokud } x \in \langle 0, \frac{5}{6} \rangle \\ 2 - \sqrt{6 - 6x} & \text{pokud } x \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}$$



6. (Určete rozdělení náhodné veličiny $W = X^2$.)

$$\begin{aligned}
 W &= X^2 = |X|^2 = V^2 \\
 F_W(x) &= F_{X^2}(x) = F_{|X|^2}(x) = F_{|X|}(\sqrt{x}) = F_V(\sqrt{x}) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{x}{2} + \frac{4}{3}\sqrt{x} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ -\frac{x}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3} & \text{pokud } x \in \langle 1, 4 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases} \\
 f_W(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{1}{2} + \frac{2}{3\sqrt{x}} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3\sqrt{x}} & \text{pokud } x \in \langle 1, 4 \rangle \\ 0 & \text{pokud } x \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases} \\
 q_W(x) &= \begin{cases} \left(\frac{4 - \sqrt{16 - 18x}}{3}\right)^2 & \text{pokud } x \in \langle 0, \frac{5}{6} \rangle \\ \left(2 - \sqrt{6 - 6x}\right)^2 & \text{pokud } x \in \langle \frac{5}{6}, 1 \rangle \end{cases}
 \end{aligned}$$



Řešení 8:

1.

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases} \\
 EX &= \frac{1}{4} \\
 DX &= E(X^2) - (EX)^2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{16} = \frac{27}{16}
 \end{aligned}$$

2. $F_Y(x) = P[Y \leq x] = P[X - 1 \leq x] = P[X \leq x + 1] = F_X(x + 1)$

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle -2, 0 \rangle \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases} \\
 EX &= -\frac{3}{4} \\
 DX &= E(X^2) - (EX)^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{16} = \frac{27}{16}
 \end{aligned}$$

x	-2	0	1
$P[Y = x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. $F_Z(x) = P[Z \leq x] = P[3 \cdot X \leq x] = P[X \leq \frac{x}{3}] = F_X(\frac{x}{3})$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle -3, 3 \rangle \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 3, 6 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 6, \infty \rangle \end{cases}$$

$$EX = \frac{3}{4}$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{63}{4} - \frac{9}{16} = \frac{243}{16} = 3^2 \cdot \frac{27}{16}$$

x	-3	3	6
$P[Y = x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

4. $F_U(x) = P[U \leq x] = P[-X \leq x] = P[X \geq -x] = 1 - P[X < -x] = 1 - \lim_{u \rightarrow -x^-} F_X(u)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{1}{4} & \text{pokud } x \in \langle -2, -1 \rangle \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$EX = -\frac{1}{4}$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{16} = \frac{27}{16}$$

x	-2	-1	1
$P[U = x]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

5.

$$X = \text{Mix}_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(Z, K)$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle -1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$V = |X| = \text{Mix}_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(-Z, K)$$

$$F_{-Z}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$F_{|X|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

$$EV = \frac{5}{4}$$

$$DV = E(V^2) - (EV)^2 = \frac{7}{4} - \frac{25}{16} = \frac{3}{16}$$

x	1	2
$P[X = x]$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

6.

$$W = X^2 = |X|^2$$

$$F_{X^2}(x) = F_{|X|^2}(x) = F_{|X|}(\sqrt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{3}{4} & \text{pokud } x \in (1, 4) \\ 1 & \text{pokud } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

$$EW = \frac{7}{4}$$

$$DW = E(W^2) - (EW)^2 = \frac{19}{4} - \frac{49}{16} = \frac{27}{16}$$

x	1	4
$P[W = x]$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$