# Pravděpodobnost a statistika

## 11. cvičení

(vytvořeno 8. prosince 2020)

## 1 Testování hypotéz

**Úloha 1** (Test střední hodnoty při známém rozptylu)**.** Teploměrem, u kterého známe směrodatnou odchylku, $\sigma = 3°\mathrm{C}$, jsme třicetkrát změřili stejnou teplotu. Z výsledků jsme vypočítali výběrový průměr $\bar{x} = 101°\mathrm{C}$. Otestujte na hladině významnosti 5% hypotézu, že teplota nepřesahuje 100°C.

**Úloha 2** (Test střední hodnoty při neznámém rozptylu)**.** Máme podezření, že hmotnost balícků cukru v prodejně za rohem neodpovídá nominální hmotnosti 1kg. Koupili jsme proto šestnáct balíčků, zvážili je a vypočítali následující hodnoty:

| | |
|---|---|
| výběrový průměr | 0.98 kg |
| výběrová směrodatná odchylka | 0.04 kg |

1. Je možné na základě těchto údajů zamítnout na hladině významnosti 5% hypotézu, že střední hodnota hmotnosti balíčků cukru je rovna 1kg?
2. Je možné na základě těchto údajů zamítnout na hladině významnosti 5% hypotézu, že střední hodnota hmotnosti balíčků cukru je alespoň 1kg?

**Úloha 3** (Test rozptylu)**.** Generátor má vracet hodnoty podle normovaného normálního rozdělení. Po jeho spuštění jsme obdrželi následující vektor hodnot:

$$\vec{x} = (-0.503, 0.811, 1.078, -0.501, 0.562, -1.032, 0.152, 0.859, -0.156, 2.213).$$

Otestujte na hladině významnosti 5% hypotézu, že roptyl je rovný 1.

**Úloha 4** (Test dvou středních hodnot se stejným neznámým rozptylem)**.** Ve dvou obchodech prodávají balíčky cukru s nominální hmotností 1kg. Nakoupili jsme v každém obchodě několik balíčků a po jejich zvážení jsme dostali tyto hodnoty:

| | 1. obchod ... $X$ | 2. obchod ... $Y$ |
|---|---|---|
| počet koupených balíčků | $m = 13$ | $n = 9$ |
| výběrový průměr | $\bar{x} = 1.02$ kg | $\bar{y} = 0.83$ kg |
| výběrový rozptyl | $s_x^2 = 0.04$ kg$^2$ | $s_y^2 = 0.09$ kg$^2$ |
| výběrová směrodatná odchylka | $s_x = 0.2$ kg | $s_y = 0.3$ kg |

1. Je možné na základě těchto dat zamítnout na hladině významnosti 5% hypotézu, že střední hodnoty hmotnosti balíčků cukru v těchto dvou obchodech jsou stejné?
2. Je možné zamítnout na hladině významnosti 5% hypotézu, že střední hodnota hmotnosti balíčků ve druhém obchodě je vyšší nebo rovna střední hodnotě hmotnosti balíčků v prvním obchodě?

**Úloha 5** (Párový test)**.** Na dvou místech jsme současně, nezávisle na sobě, měřili teplotu.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 26.5 | 25.0 | 24.3 | 26.3 | 22.0 |
| $y_i$ | 24.0 | 23.5 | 24.4 | 25.0 | 22.2 |

Otestujte na hladině významnosti 5% hypotézu, že:

1. na obou místech je teplota stejná,
2. na prvním místě teplota není vyšší, než na místě druhém.

# Řešení

**Řešení 1:**

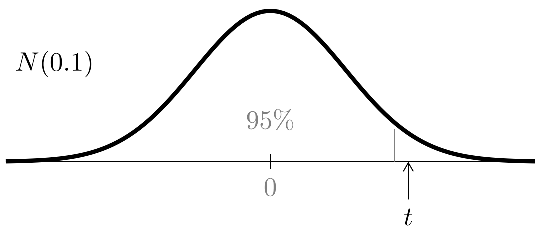
- nulová hypotéza $H_0$: $\mu \leq 100°C$
- alternativní hypotéza $H_1$: $\mu > 100°C$
- testovací statistika:

$$T = \frac{\bar{X} - c}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}} \sim N(0.1)$$

- realizace testovací statistiky:

$$t = \frac{101 - 100}{\sqrt{\frac{3^2}{30}}} \doteq 1.8257$$

- kvantil: $\Phi^{-1}(0.95) \doteq 1.645$
- Nulovou hypotézu $H_0$ zamítáme.




**Řešení 2:**

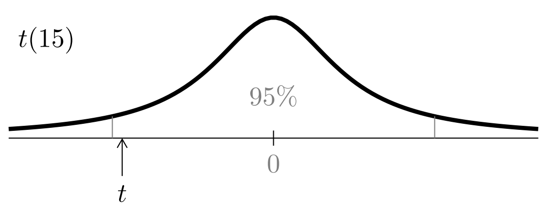
- testovací statistika:

$$T = \frac{\bar{X} - c}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - 1}{\frac{S_X}{\sqrt{16}}} \sim t(15)$$

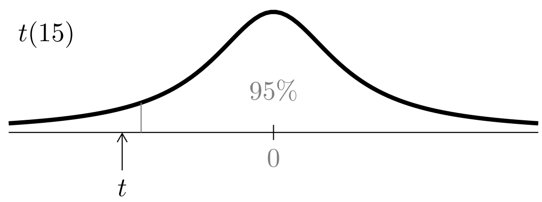
- realizace testovací statistiky:

$$t = \frac{0.98 - 1}{\frac{0.04}{\sqrt{16}}} = \frac{-0.02}{0.01} = -2$$

1. - nulová hypotéza $H_0$: $\mu = 1$
   - alternativní hypotéza $H_1$: $\mu \neq 1$
   - kvantil: $q_{t(15)}(0.975) \doteq 2.13$
   - Nulovou hypotézu $H_0$ nezamítáme.

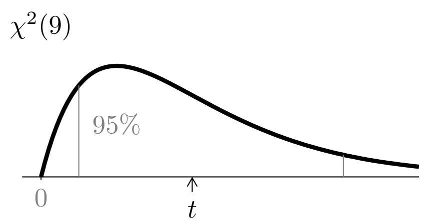



2. - nulová hypotéza $H_0$: $\mu \geq 1$
   - alternativní hypotéza $H_1$: $\mu < 1$
   - kvantil: $q_{t(15)}(0.05) = -q_{t(15)}(0.95) \doteq -1.75$
   - Nulovou hypotézu $H_0$ zamítáme.




**Řešení 3:**

- nulová hypotéza $\mathrm{H}_0: \quad \sigma^2 = 1$
- alternativní hypotéza $\mathrm{H}_1: \quad \sigma^2 \neq 1$
- počet měření: $n = 10$
- výběrový průměr: $\bar{x} = 0.3483$
- výběrový roptyl: $s_X^2 = 0.9082$
- testovací statistika:
$$T = \frac{(n-1)S_X^2}{c} \sim \chi^2(n-1)$$
- realizace testovací statistiky:
$$t = \frac{9 \cdot 0.9082}{1} \doteq 8.174$$
- kvantily:
  - $\chi^2_{(9)}(0.025) \doteq 2.7$
  - $\chi^2_{(9)}(0.975) \doteq 19.02$
- Nulovou hypotézu $\mathrm{H}_0$ nezamítáme.




**Řešení 4:**

- Test rovnosti rozptylů:
  - nulová hypotéza $\mathrm{H}_0: \quad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$
  - alternativní hypotéza $\mathrm{H}_1: \quad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
  - testovací statistika:
$$T = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$
  - realizace testovací statistiky:
$$t = \frac{0.04}{0.09} = \frac{4}{9} \doteq 0.4444$$
  - kvantily:
    * $q_{F_{(12,8)}}(0.975) \doteq 4.2$
    * $q_{F_{(12,8)}}(0.025) = \frac{1}{q_{F_{(8,12)}}(0.975)} = \frac{1}{3.51} \doteq 0.2849$
  - Nulovou hypotézu $\mathrm{H}_0$ nezamítáme, rozptyly nepovažujeme za různé.

1. • nulová hypotéza $\mathrm{H}_0: \quad \mu_X = \mu_Y$

- alternativní hypotéza $\mathrm{H}_1$: $\quad \mu_X \neq \mu_Y$
- testovací statistika:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t\Big((m-1) + (n-1)\Big)$$

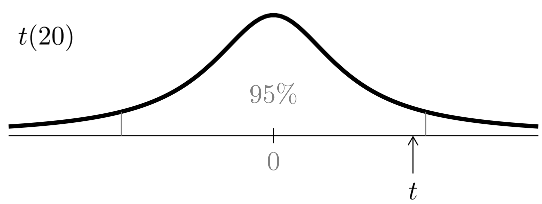
$$S^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{(m-1) + (n-1)}$$

- realizace testovací statistiky:

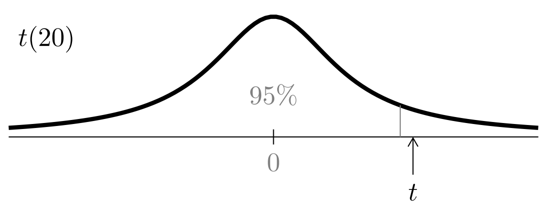
$$s^2 = \frac{12 \cdot 0.04 + 8 \cdot 0.09}{12 + 8} = \frac{0.48 + 0.72}{20} = \frac{1.2}{20} = \frac{3}{50} = 0.06$$

$$t = \frac{1.02 - 0.83}{\sqrt{0.06} \cdot \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{9}}} = \frac{1.02 - 0.83}{\sqrt{0.06} \cdot \sqrt{\frac{22}{117}}} = \frac{0.19}{0.1062} \doteq 1.7891$$

- kvantil: $q_{t_{(20)}}(0.975) \doteq 2.09$
- Nulovou hypotézu $\mathrm{H}_0$ nezamítáme.




2. - nulová hypotéza $\mathrm{H}_0$: $\quad \mu_X \leq \mu_Y \quad \ldots \quad T \leq 0$
   - alternativní hypotéza $\mathrm{H}_1$: $\quad \mu_X > \mu_Y \quad \ldots \quad T > 0$
   - kvantil: $q_{t_{(20)}}(0.95) \doteq 1.72$
   - Nulovou hypotézu $\mathrm{H}_0$ zamítáme.




**Řešení 5:**

1. - nulová hypotéza $\mathrm{H}_0$: teplota je na obou místech stejná, $X = Y$
   - alternativní hypotéza $\mathrm{H}_1$: teplota není na obou místech stejná, $X \neq Y$
   - testovací statistika:

$$T = \frac{\bar{\Delta}}{S_\Delta}\sqrt{n} \;\ldots\; t(n-1)$$

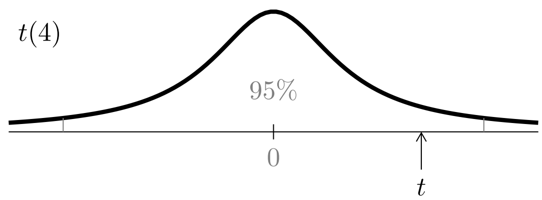
$$\Delta = X - Y$$

   - realizace testovací statistiky:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\delta_i$ | $\delta_i - \bar{\delta}$ | $(\delta_i - \bar{\delta})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 26.5 | 24.0 | 2.5 | 1.5 | 2.25 |
| 2. | 25.0 | 23.5 | 1.5 | 0.5 | 0.25 |
| 3. | 24.3 | 24.4 | $-0.1$ | $-1.1$ | 1.21 |
| 4. | 26.3 | 25.0 | 1.3 | 0.3 | 0.09 |
| 5. | 22.0 | 22.2 | $-0.2$ | $-1.2$ | 1.44 |
| $\Sigma$ | | | 5.0 | | 5.24 |
| $\frac{1}{n}\Sigma$ | | | 1.0 | | |
| $\frac{1}{n-1}\Sigma$ | | | | | 1.31 |

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta} &= 1.0 \\
s_\delta^2 &= 1.31 \\
s_\delta &= 1.1446 \\
t &= \frac{\bar{\delta}}{s_\delta}\sqrt{n} = \frac{1.0}{1.1446}\sqrt{5} \doteq 1.9536
\end{aligned}
$$

- kvantil: $q_{t(4)}(0.975) \doteq 2.78$
- Nulovou hypotézu $\mathrm{H}_0$ nezamítáme.




2.
- nulová hypotéza $\mathrm{H}_0$: $X \leq Y$
- alternativní hypotéza $\mathrm{H}_1$: $X > Y$
- kvantil: $q_{t(4)}(0.95) \doteq 2.13$
- Nulovou hypotézu $\mathrm{H}_0$ nezamítáme.