Numerický výpočet integrálu

Jan Hora

Česká zemědělská univerzita

16. prosince 2011

Určitý integrál

- Buď f spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ je obsah plochy ohraničené osou x, funkcí f a svislými přímkami $x = a$ a $x = b$.
- V případě, že známe k funkci f primitivní funkci F, čili $F(x)' = f(x)$, můžeme tento obsah spočítat jakožto Newtonův integrál

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- V opačném případě můžeme použít nějakou numerickou (přibližnou) metodu.

Obdélníková metoda

Buď f spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť body x_i, $i = 0, 1, , \ldots, n$, rozdělují interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí, čili $x_i = a + ih$, kde $h = \frac{b-a}{n}$ je šířka každého z těchto intervalů. Pak můžeme hodnotu určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ aproximovat hodnoutou výrazu

$$(O)\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Poznámka

Se zvyšujícím se n je možné pro rozumné funkce dosáhnout libovolné přesnosti.

Obdélníková metoda

Příklad

Pomocí obdélníkové metody nalezněte přibližnou hodnotu integrálu $\int_0^1 x^2 dx$. *Interval rozdělte na 10 částí.*

Řešení:

$$(O) \int_0^1 x^2 dx = \frac{1-0}{10}\left(0 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) = 0.285.$$

Lichoběžníková metoda

Buď f spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť body x_i, $i = 0, 1, , \dots, n$, rozdělují interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí, čili $x_i = a + ih$, kde $h = \frac{b-a}{n}$ je šířka každého z těchto intervalů. Pak můžeme hodnotu určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ aproximovat hodnoutou výrazu

$$(L) \int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} hf(x_i) + h\frac{f(x_n)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Poznámka

Se zvyšujícím se n je možné pro rozumné funkce dosáhnout libovolné přesnosti.

Lichoběžníková metoda

Příklad

Pomocí lichoběžníkové metody nalezněte přibližnou hodnotu integrálu $\int_0^1 x^2 dx$. Interval rozdělte na 10 částí.

Řešení:

$$(L) \int_0^1 x^2 dx = \frac{1-0}{10}\left(0 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = 0.335.$$

Simpsonova metoda

Buď f spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť body x_i, $i = 0, 1, , \ldots, n$, rozdělují interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí (n sudé), čili $x_i = a + ih$, kde $h = \frac{b-a}{n}$ je šířka každého z těchto intervalů. Pak můžeme hodnotu určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ aproximovat hodnoutou výrazu

$$(S)\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)}{3} + \sum_{\substack{i=1\\ i \text{ liché}}}^{n-1} \frac{4}{3}hf(x_i) + \sum_{\substack{i=2\\ i \text{ sudé}}}^{n-1} \frac{2}{3}hf(x_i) + h\frac{f(x_n)}{3} =$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + \sum_{\substack{i=1\\ i \text{ liché}}}^{n-1} 4f(x_i) + \sum_{\substack{i=2\\ i \text{ sudé}}}^{n-1} 2f(x_i) + f(x_n)\right).$$

Poznámka

Se zvyšujícím se n je možné pro rozumné funkce dosáhnout libovolné přesnosti.

Simpsonova metoda

Příklad

Pomocí Simpsonovy metody nalezněte přibližnou hodnotu integrálu $\int_0^1 x^2 dx$. Interval rozdělte na 10 částí.

Řešení:

$$(S)\int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \frac{1-0}{30}\left(0 + 4\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2\right)\right.$$

$$\left. +2\left(\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2\right) + 1\right) = \frac{1}{3}.$$