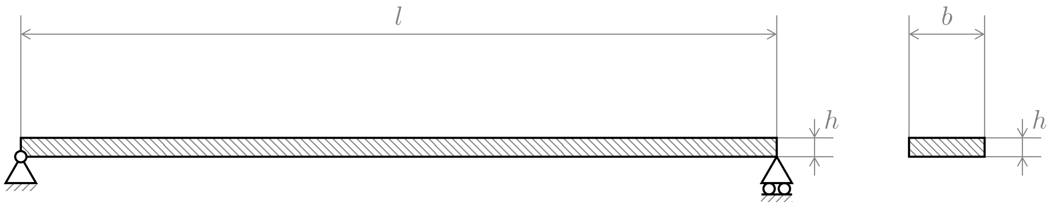
Průhyb prostě uloženého nosníku

17. května 2020

1 Zadání úlohy

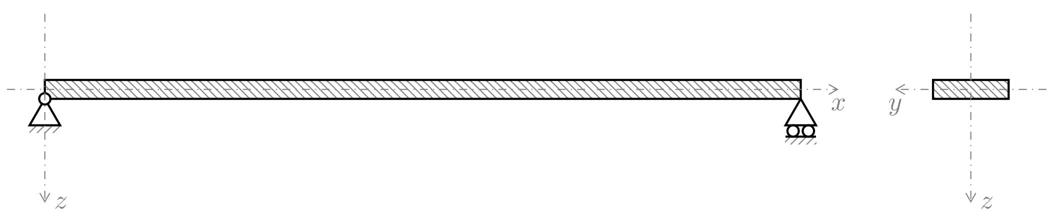


Úkolem je najít průhyb prostě uloženého ocelového nosníku s konstantním obdélníkovým průřezem, který je zatížený vlastní vahou. Parametry nosníku jsou:

- $l = 2\,\mathrm{m}$ (délka),
- $h = 1\,\mathrm{cm} = 0,01\,\mathrm{m}$ (výška),
- $b = 10\,\mathrm{cm} = 0,1\,\mathrm{m}$ (šířka),
- $\varrho = 7850\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ (hustota oceli),
- $E = 2\cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}$ (Youngův modul pružnosti pro ocel).

2 Popis úlohy diferenciální rovnicí s okrajovými podmínkami

Vytyčíme souřadné osy tak, aby osa x procházela podél nosníku těžištěm jeho průřezu:



Osu z, ve které budeme vynášet hodnoty průhybu, orientujeme směrem dolů (hodnoty průhybu vyjdou kladnéi).

Průhyb pružného nosníku je popsán funkcí $u\colon \langle 0,l\rangle \to \mathbb{R}$, která je řešením diferenciální rovnice[1] s okrajovými podmínkami:

$$-\frac{u''(x)}{\Big(1+\big(u'(x)\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}} \;=\; \frac{M(x)}{E\cdot J_y}; \qquad x\in\langle 0,l\rangle\,; \qquad u(0)=0,\ \ u(l)=0, \tag{1}$$

kde:

- $u(x)$ označuje průhyb nosníku ve směru osy z v bodě $x \in \langle 0,l\rangle$,
- $M(x)$ označuje *ohybový moment* v bodě $x \in \langle 0,l\rangle$,

[1]Odvození této diferenciální rovnice můžete vidět například ve videopřednáškách doc. Josefa Mevalda (Přednáška 8 a Přednáška 10) na `http://www.kmp.tul.cz/content/pruznost-pevnost-i-ppi`.

- J_y označuje *kvadratický moment průřezu* nosníku vzhledem k ose y (též *moment setrvačnosti*).

Diferenciální rovnice (1) je nelineární. V našem případě se ale dá očekávat, že průhyb $u(x)$ bude pro všechna $x \in \langle 0, l \rangle$ mnohem menší než délka nosníku, a proto jeho derivace $u'(x)$ bude velmi blízká nule. Hodnota $\left(1 + \left(u'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$ potom bude velmi blízká jedné a úlohu (1) můžeme zjednodušit na:

$$-u''(x) \;=\; \frac{M(x)}{E \cdot J_y}; \qquad x \in \langle 0, l \rangle\,; \qquad u(0) = 0,\;\; u(l) = 0, \tag{2}$$

což už je lineární diferenciální rovnice.

2.1 Hodnota J_y

Hodnota J_y je dána vztahem:

$$J_y \;=\; \int_S z^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde S je plocha průřezu nosníku. V našem případě máme obdélníkový průřez, a proto:

$$\begin{aligned} J_y \;&=\; \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{z=-h/2}^{h/2} z^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{y=-b/2}^{b/2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}y \\ &=\; \int_{y=-b/2}^{b/2} \frac{h^3}{12}\,\mathrm{d}y \;=\; \frac{h^3}{12}\big[y\big]_{-b/2}^{b/2} \;=\; \frac{b\,h^3}{12}. \end{aligned}$$

2.2 Hodnota $M(x)$

Hodnotu $M(x)$, tj. hodnotu ohybového momentu v bodě $x \in \langle 0, l \rangle$, určíme metodou myšleného řezu. Nejprve určíme reakce v podpěrách nosníku. Hmotnost nosníku je:

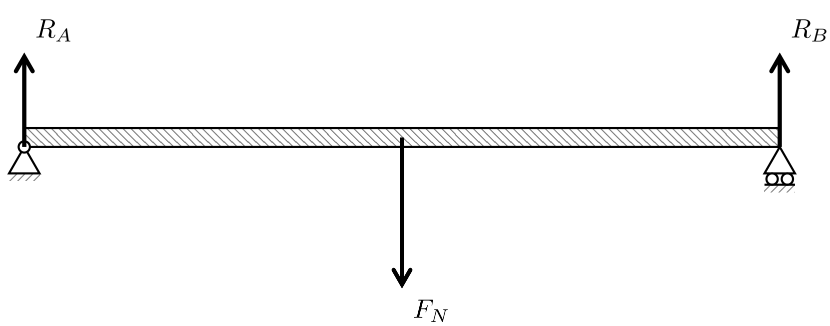
$$m \;=\; \varrho\, h\, b\, l.$$

Tíha nosníku je:

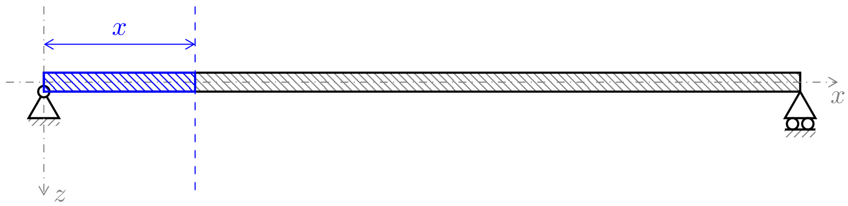
$$F_N \;=\; m\, g \;=\; \varrho\, h\, b\, l\, g,$$

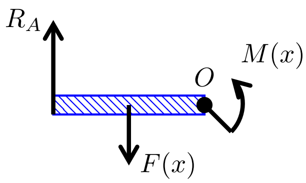
kde $g = 9{,}807\, m\, s^{-2}$ je tíhové zrychlení. Po uložení nosníku vzniknou podle statických podmínek rovnováhy v místech podepření reakce, které mají (vzhledem k souměrnosti tělesa) stejnou hodnotu a jsou rovny polovině tíhy nosníku:

$$R_A \;=\; R_B \;=\; \frac{F_N}{2} \;=\; \frac{\varrho\, h\, b\, l\, g}{2}.$$



Abychom zjistili hodnotu M v bodě $x \in \langle 0, l \rangle$, oddělíme část nosníku odpovídající intervalu $\langle 0, x \rangle$.





Na oddělenou část nosníku působí reakce R_A a tíha $F(x)$ oddělené části, kde $F(x) = \varrho\, h\, b\, x\, g$. Vzhledem k bodu O tak vzniknou momenty síly o velikostech $R_A \cdot x$ a $F(x) \cdot \frac{x}{2}$. Protože je oddělená část nosníku ve statické rovnováze, musí být součet momentů nulový. Vzhledem k bodu O tedy existuje ještě moment síly $M(x)$ a platí:

$$M(x) - R_A \cdot x + F(x) \cdot \frac{x}{2} \;=\; 0,$$

z čehož dostáváme:

$$M(x) \;=\; R_A \cdot x - F(x) \cdot \frac{x}{2} \;=\; \frac{\varrho\, h\, b\, l\, g}{2} \cdot x - \varrho\, h\, b\, x\, g \cdot \frac{x}{2} \;=\; \frac{\varrho\, h\, b\, g}{2}\left(l\, x - x^2\right).$$

2.3 Výsledná podoba okrajové úlohy

Dosadíme výrazy pro $M(x)$ a J_y do úlohy (2):

$$\begin{aligned}
-u''(x) &= \frac{\frac{\varrho\, h\, b\, g}{2}\left(l\, x - x^2\right)}{E \cdot \frac{b\, h^3}{12}}, \\
-u''(x) &= \frac{6\, \varrho\, g\, l}{E\, h^2}\, x - \frac{6\, \varrho\, g}{E\, h^2}\, x^2 \\
-u''(x) &= \frac{6 \cdot 7850 \cdot 9,807 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,01^2} \cdot x - \frac{6 \cdot 7850 \cdot 9,807}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,01^2} \cdot x^2.
\end{aligned}$$

Úloha má tedy tvar:

$$-u''(x) \;=\; 4,6191 \cdot 10^{-2} \cdot x - 2,3095 \cdot 10^{-2} \cdot x^2; \qquad x \in \langle 0, 2 \rangle\,; \qquad u(0) = 0,\;\; u(2) = 0. \tag{3}$$

3 Řešení metodou konečných diferencí

Zvolíme krok dělení $h = \frac{1}{2}$; při tomto kroku dělení hledáme aproximaci hodnot funkce u (tj. řešení úlohy (3)) v bodech:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Označme tyto aproximované hodnoty jako u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. Z okrajových podmínek ihned plyne, že $u_0 = u_4 = 0$. Zbývá tedy určit hodnoty u_1, u_2, u_3. Diferenciální rovnici (3) přepíšeme na soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned}
-\frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{\frac{1}{4}} &= 4,6191 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2} - 2,3095 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\
-\frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{\frac{1}{4}} &= 4,6191 \cdot 10^{-2} \cdot 1 - 2,3095 \cdot 10^{-2} \cdot 1^2, \\
-\frac{u_2 + u_4 - 2u_3}{\frac{1}{4}} &= 4,6191 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{3}{2} - 2,3095 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 8u_1 & - & 4u_2 & & & = & 1,7322 \cdot 10^{-2}, \\ -4u_1 & + & 8u_2 & - & 4u_3 & = & 2,3095 \cdot 10^{-2}, \\ & - & 4u_2 & + & 8u_3 & = & 1,7322 \cdot 10^{-2}, \end{array}$$

jejímž (jediným) řešením jsou hodnoty:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 7,2173 \cdot 10^{-3} \doteq 7,2\,\mathrm{mm}, \\ u_2 & = & 1,0104 \cdot 10^{-2} \doteq 10,1\,\mathrm{mm}, \\ u_3 & = & 7,2173 \cdot 10^{-3} \doteq 7,2\,\mathrm{mm}. \end{array}$$

4 Řešení Ritzovou metodou

Úloha (3) je pozitivně definitní[2], můžeme tedy použít Ritzovu metodu. Jako bázi prostoru, ve kterém budeme hledat aproximaci řešení, zvolíme funkce:

$$\begin{array}{rcccl} v_1(x) & = & x(2-x) & = & 2x - x^2, \\ v_2(x) & = & x^2(2-x) & = & 2x^2 - x^3, \\ v_3(x) & = & x^3(2-x) & = & 2x^3 - x^4. \end{array}$$

První derivace těchto funkcí jsou:

$$\begin{array}{rcl} v_1'(x) & = & 2 - 2x, \\ v_2'(x) & = & 4x - 3x^2, \\ v_3'(x) & = & 6x^2 - 4x^3. \end{array}$$

Energetický součin můžeme pomocí pravidla „per partes” upravit na tvar:

$$(u,v)_A = -\int_0^2 u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u'(x)v(x)\big]_0^2 + \int_0^2 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Spočítáme jednotlivé energetické součiny bázových funkcí:

$$\begin{array}{rcl} (v_1,v_1)_A & = & \int_0^2 (2-2x)\cdot(2-2x)\ \mathrm{d}x = \frac{8}{3}, \\ (v_1,v_2)_A & = & \int_0^2 (2-2x)\cdot\big(4x-3x^2\big)\ \mathrm{d}x = \frac{8}{3}, \\ (v_1,v_3)_A & = & \int_0^2 (2-2x)\cdot\big(6x^2-4x^3\big)\ \mathrm{d}x = \frac{16}{5}, \\ (v_2,v_2)_A & = & \int_0^2 \big(4x-3x^2\big)\cdot\big(4x-3x^2\big)\ \mathrm{d}x = \frac{64}{15}, \\ (v_2,v_3)_A & = & \int_0^2 \big(4x-3x^2\big)\cdot\big(6x^2-4x^3\big)\ \mathrm{d}x = \frac{32}{5}, \\ (v_3,v_3)_A & = & \int_0^2 \big(6x^2-4x^3\big)\cdot\big(6x^2-4x^3\big)\ \mathrm{d}x = \frac{384}{35}. \end{array}$$

Spočítáme skalární součiny bázových funkcí a funkce na pravé straně diferenciální rovnice v úloze (3):

$$\begin{array}{rcl} (f,v_1) & = & \int_0^2 \big(4,6191\cdot 10^{-2}\cdot x - 2,3095\cdot 10^{-2}\cdot x^2\big)\cdot\big(2x-x^2\big)\ \mathrm{d}x = 2,4635\cdot 10^{-2}, \\ (f,v_2) & = & \int_0^2 \big(4,6191\cdot 10^{-2}\cdot x - 2,3095\cdot 10^{-2}\cdot x^2\big)\cdot\big(2x^2-x^3\big)\ \mathrm{d}x = 2,4635\cdot 10^{-2}, \\ (f,v_3) & = & \int_0^2 \big(4,6191\cdot 10^{-2}\cdot x - 2,3095\cdot 10^{-2}\cdot x^2\big)\cdot\big(2x^3-x^4\big)\ \mathrm{d}x = 2,8154\cdot 10^{-2}. \end{array}$$

[2]Pozitivní definitnost úlohy lze ověřit například podle Tabulky 1 v Přednášce 6.

Dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
\tfrac{8}{3}\alpha_1 &+ \tfrac{8}{3}\alpha_2 + \tfrac{16}{5}\alpha_3 = 2,4635\cdot 10^{-2},\\
\tfrac{8}{3}\alpha_1 &+ \tfrac{64}{15}\alpha_2 + \tfrac{32}{5}\alpha_3 = 2,4635\cdot 10^{-2},\\
\tfrac{16}{5}\alpha_1 &+ \tfrac{32}{5}\alpha_2 + \tfrac{384}{35}\alpha_3 = 2,8154\cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

jejímž (jediným) řešením jsou hodnoty:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 7,6985\cdot 10^{-3},\\
\alpha_2 &= 3,8492\cdot 10^{-3},\\
\alpha_3 &= -1,9246\cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Aproximací řešení úlohy (3) je potom funkce:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= 7,6985\cdot 10^{-3}\cdot\left(2x-x^2\right) + 3,8492\cdot 10^{-3}\cdot\left(2x^2-x^3\right) - 1,9246\cdot 10^{-3}\cdot\left(2x^3-x^4\right)\\
&= 3,0794\cdot 10^{-2}\cdot x - 1,5397\cdot 10^{-2}\cdot x^3 + 3,8492\cdot 10^{-3}\cdot x^4.
\end{aligned}$$

Graf této funkce vidíme na následujícím obrázku (kladné hodnoty jsou zde vynášeny směrem dolů, tj. ve zvoleném kladném směru osy z):