

Numerické řešení rovnic

Jan Hora

Česká zemědělská univerzita

16. prosince 2011

Věta

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají různá znaménka. Položme $a_1 = a$, $b_1 = b$ a vždy $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

Pokud má $f(x_k)$ stejné znaménko jako $f(a)$, položíme dále $a_{k+1} = x_k$ a $b_{k+1} = b_k$, v opačném případě $a_{k+1} = a_k$ a $b_{k+1} = x_k$. Pak rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu $\langle a_k, b_k \rangle$ řešení x^ a $\lim_{k \rightarrow \infty} |b_k - a_k| = 0$.*

Metoda půlení intervalu

Příklad

Pomocí metody půlení intervalu najděte přibližné řešení rovnice $f(x) = 8x^3 - 6x + 1 = 0$ v intervalu $\langle -1, -\frac{1}{2} \rangle$. Spočítejte sedm iterací.

Řešení:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{17}{8}$
2	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$\frac{57}{64}$
3	-1	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{15}{16}$	$\frac{17}{512}$
4	-1	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{31}{32}$	-0.460693359
5	$-\frac{31}{32}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{61}{64}$	-0.2081604
6	$-\frac{32}{61}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{121}{128}$	-0.086093902
7	$-\frac{64}{121}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{241}{256}$	-0.026100635

Věta

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají různá znaménka. Položme $a_1 = a$, $b_1 = b$ a vždy

$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$. Pokud má $f(x_k)$ stejné znaménko jako $f(a)$,

položíme dále $a_{k+1} = x_k$ a $b_{k+1} = b_k$, v opačném případě

$a_{k+1} = a_k$ a $b_{k+1} = x_k$. Pak rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu

$\langle a_k, b_k \rangle$ řešení x^ a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.*

Příklad

Pomocí metody regula falsi nalezněte přibližné řešení rovnice $f(x) = 8x^3 - 6x + 1 = 0$ v intervalu $\langle -1, -\frac{1}{2} \rangle$. Spočítejte tři iterace.

Řešení:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	$\frac{57}{64}$
2	-1	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{113}{121}$	0.087483863
3	-1	$-\frac{113}{121}$	-0.939203049	0.00743242199
4	-1	-0.939203049	-0.939651584	0.00062340723

Věta

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají různá znaménka a necht' na $\langle a, b \rangle$ existují spojitě a nenulové derivace $f'(x)$ a $f''(x)$. Zvolme $x_1 \in \{a, b\}$ tak, aby $f(x_1)$ a $f''(x_1)$ měly stejná znaménka. Položme vždy $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Pak rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu $\langle a, b \rangle$ řešení x^ a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.*

Newtonova metoda (metoda tečen)

Příklad

Pomocí metody tečen najděte přibližné řešení rovnice $f(x) = 8x^3 - 6x + 1 = 0$ v intervalu $\langle -1, -\frac{1}{2} \rangle$. Spočítejte tři iterace.

Řešení:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
1	-1	-1	18
2	$-\frac{17}{18}$	-0.072702332	15.40740741
3	-0.939725783	-0.00050385	15.19402916
4	-0.939692622	-0.000000025	