Výroková logika

Jan Hora

Česká zemědělská univerzita

14. září 2017

U makléře

Já: Dobrý den, rád bych koupil nějaký světlý byt. Chtěl bych, aby měl dvě koupelny a aby byl v domě výtah. A neměl by být nijak extrémně drahý.
Makléř: No, víte, byty se dvěma koupelnami nebývají levné. Každopadné nějaké byty, co by se Vám mohly líbit, tady mám. Ovšem, pokud budete trvat na výtahu, pak nemůžete mít dvě koupelny. Ale rozhodně Vám nenabídnu něco tmavého, bez výtahu a s jednou koupelnou, tak váženému zákazníkovi, jako jste Vy (následováno slizkým úsměvem). A jak tak koukám, je tu ještě jedna dobrá zpráva, všechny světlé byty v nabídce mají dvě koupelny a výtah.

Základní stavební kameny

- Definice

  Elementární výrok je oznamovací věta, o které má smysl rozhodovat, jestli je pravdivá, a kterou chápeme jako nedělitelný celek.

- Příklady
  - *Mám dnes narozeniny.*
  - $3^3 = 9$.
  - *Uvařím švestkové knedlíky.*

- Nepříklady
  - *Jdi pryč.*
  - $x^2 - 2 \geq 3x + 2$.
  - *Jestli budou mít švestky, uvařím švestkové knedlíky.*

Některé výroky jsou složitější

- Příklady
  - *H: Půjdu dnes večer s Pavlem do hospody.*
  - *S: NEpůjdeš dnes večer s Pavlem do hospody.*
  - *H:*
  - *S: JESTLI půjdeš dnes večer s Pavlem do hospody, PAK budou zítra k večeři bramborové šišky s mákem. (dotyčný je nemá rád)*
  - *H: Půjdu dnes večer s Pavlem do hospody A dám si guláš se šesti.*
  - *S: Zůstaneš doma NEBO pozvu na víkend svojí maminku.*
  - *H: Půjdu dnes večer do hospody PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ půjde Pavel.*

Logické spojky

Značení	Název	Význam
A', $\overline{A}$, $\neg A$	Negace	Není pravda, že A
$A \wedge B$	Konjunkce	A a současně B
$A \vee B$	Disjunkce	A nebo B
$A \Rightarrow B$	Implikace	Jestliže A, pak B
$A \Leftrightarrow B$	Ekvivalence	A právě tehdy, když B

Skládáme výroky ve formule

- Definice
  - *Výroková proměnná je formální symbol zastupující libovolný elementární výrok.*
  - *Výroková konstanta je formální symbol zastupující konkrétní výrokovou hodnotu (čili Pravdu nebo Nepravdu).*

Definice

- *Každá výroková proměnná je výroková formule.*
- *Každá výroková konstanta je výroková formule.*
- *Pokud jsou φ, ψ výrokové formule, pak jsou výrokové formule i $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$.*
- *Jiné výrokové formule nejsou.*

- Místo výrokové formule budeme obvykle říkat jen formule.

Pravda, nepravda, lež

- Výroková proměnná (stejně jako elementární výrok) může nabývat dvou hodnot, a to PRAVDA/NEPRAVDA, značí se 1/0.
- Pravdivost složitějších výrokových formulí definujeme tak, aby souhlasila s významem těchto spojek v běžné řeči:

A	B	A'	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Příklady

Příklad

Napište pravdivostní tabulku formule $A \Rightarrow (B' \Rightarrow A)$.

Příklad

Napište pravdivostní tabulku formule $(A' \Leftrightarrow B) \wedge (B' \vee C)'$.

Ohodnotit znamená dosadit

Definice

Ohodnocení formule je přiřazení hodnoty pravda či nepravda (0 či 1) každé výrokové proměnné obsažené v této formuli.

Absolutní pravda, absolutní lež

- **Definice**
  Tautologie je formule, která je pravdivá při každém ohodnocení.

  Tedy formule, která má ve všech řádcích pradivostní tabulky jedničky.

- **Definice**
  Kontradikce (spor) je formule, která je při každém ohodnocení nepravdivá.

  Tedy formule, která má ve všech řádcích pradivostní tabulky nuly.

Není ekvivalence jako ekvivalence

- Příklad
  Napište pravdivostní tabulku formule $(A \vee B' \vee C') \Rightarrow (A \wedge B)$ *a na jejím základě určete, či se jedná o tautologii (kontradikci).*
- Poznámka
  Někdy se tautologie/kontradikce značí jen symbolem 1/0.
- Definice
  Formule se nazývá splnitelná, pokud existuje ohodnocení, při kterém je její pravdivostní hodnota 1.
- Definice
  Dvě formule (řekněme φ *a* ψ*) se nazývají ekvivalentní, pokud nabývají stejné pravdivostní hodnoty při všech ohodnoceních (mají stejnou pravdivostní tabulku). Značíme* $\varphi \equiv \psi$*.*

Příklady

Příklad

Zjistěte, zda jsou následující formule ekvivalentní

1. $\varphi = \neg(\neg A)$, $\psi = A$,
2. $\varphi = A \wedge (B \vee C)$, $\psi = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
3. $\varphi = A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow E)))$, $\psi = A \vee B \vee C \vee D \vee E$,
4. $\varphi = (A \vee B)'$, $\psi = A' \wedge B'$.

Jak je to s tím makléřem?

- A – s výtahem
- B – se dvěma koupelnami
- C – světlý

A	B	C	$A \Rightarrow B'$	$(A' \wedge B' \wedge C')'$	$C \Rightarrow (A \wedge B)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Logický důsledek

Definice

Říkáme, že formule ψ je důsledkem formule φ, pokud je ψ pravdivá při každém ohodnocení, při kterém je pravdivá formule φ. Tento vztah se značí $\varphi \models \psi$.

Definice

Říkáme, že formule ψ je důsledkem množiny formulí Γ, pokud je ψ pravdivá při každém ohodnocení, při kterém je pravdivá každá formule z množiny Γ. Tento vztah se značí $\Gamma \models \psi$.

Dám si moučník?

Příklad

Polévku nebo hlavní jídlo si určitě dám, ovšem jestliže si dám hlavní jídlo, nedám si rozhodně polévku i moučník.
Určete, zda jsou následující věty logickým důsledkem výše uvedeného:

- *Dám si polévku.*
- *Dám si hlavní jídlo.*
- *Jestliže si dám hlavní jídlo i moučník, nedám si polévku.*

Příklady ekvivalentních formulí

- $\neg(\neg A) \equiv A$, Zákon dvojité negace
- $\neg(A \vee B) \equiv A' \wedge B'$, De Morganova pravidla
- $\neg(A \wedge B) \equiv A' \vee B'$,
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge B'$,
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B) \vee (A' \wedge B')$,
- $A \vee A \equiv A$, $A \wedge A \equiv A$, idempotence
- $A \vee B \equiv B \vee A$, $A \wedge B \equiv B \wedge A$, komutativita
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$, asociativita
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, distributivita
- $A \wedge A' \equiv 0$, $A \vee A' \equiv 1$,
- $A \vee 1 \equiv 1$, $A \vee 0 \equiv A$,
- $A \wedge 1 \equiv A$, $A \wedge 0 \equiv 0$.

Disjunkce konjunkcí, konjunkce disjunkcí

- Definice
  Výrokové proměnné a jejich negace se souhrnně nazývají literály.
- Definice
  Formule je v disjunktivním tvaru (disjunktivní normální formě – DNF), pokud je disjunkcí konjunkcí literálů.
- Definice
  Formule je v úplném disjunktivním tvaru, pokud je v disjunktivním tvaru a každá konjunkce obsahuje všechny výrokové proměnné nebo jejich negace.
- Definice
  Formule je v konjunktivním tvaru (konjunktivní normální formě – CNF), pokud je konjunkcí disjunkcí literálů.

Příklady

Příklad

Převeďte do disjunktivního tvaru

1. $(A' \wedge (B' \vee A))$,
2. $(A' \Rightarrow (B \wedge C'))'$,
3. $A' \Leftrightarrow (B \vee C')$.

Příklad

Převeďte do konjunktivního tvaru

1. $A \vee (A' \wedge B')'$,
2. $(A' \Rightarrow (B \wedge C'))'$,
3. $A' \Leftrightarrow B$.

Příklady

Příklad

Převeďte do úplného disjunktivního tvaru

1. $A \vee (A' \wedge B)$,
2. $(A \wedge B) \vee (B \wedge C')$,
3. $(A' \Rightarrow B') \vee (B \wedge C')$.

Příklad

Napište jakoukoli formuli φ s následující pravdivostní tabulkou

A	B	φ
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Příklady

Příklad

Napište jakoukoli formuli φ s následující pravdivostní tabulkou

A	B	C	φ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1