1. cvičení

Opakování základních pojmů

Opakování vybraných partií z:
- Matematiky (lineární algebra, matematická analýza)
- Statistiky (regresní analýza)

1.1 Úvod do problematiky

1.1.1. Vektorový počet

Vektor lze definovat jako m-tici reálných čísel.

$$\underline{x}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_m \end{vmatrix}$$

Čísla x_i $(i = 1,...,m)$ jsou prvky (komponenty, složky nebo souřadnice) sloupcového vektoru. Obecně lze vektor chápat jako abstraktní prvek vektorového prostoru.

Dva sloupcové vektory jsou si rovny, právě když jsou si rovny jejich odpovídající prvky, tj.:
$\underline{x} = \underline{y}$ tehdy a jen tehdy, když $x_i = y_i$ $(i = 1,...,m)$.

Základní operace definované na sloupcových vektorech jsou sčítání a násobení skalárem.

Sčítání: $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$ tehdy a jen tehdy, když $z_i = x_i + y_i$ $(i = 1,...,m)$.
Součet dvou sloupcových vektorů je definován pouze pro případ, kdy oba vektory mají stejný počet prvků.

Násobení skalárem: $\underline{y} = c\underline{x}$ tehdy a jen tehdy, když $y_i = cx_i$ $(i = 1,..,m)$.

Uvedené operace lze kombinovat a dostat **lineární kombinaci množiny vektorů** ve tvaru:
$\underline{y} = c_1\underline{x}^{(1)} + ... + c_n\underline{x}^{(n)}$ tehdy a jen tehdy, když $y_i = c_1x_i^{(1)} + ... + c_nx_i^{(n)}$ (i = 1, ...,m), kde $x_i^{(j)}$ je i-tý prvek j-tého vektoru.

O množině vektorů pravíme, že je **lineárně závislá** v případě, že existuje **netriviální kombinace vektorů**, která je rovna nulovému vektoru. Přesněji, množina n vektorů typu $m \times 1$ $\{\underline{x}^{(1)}, ..., x^{(n)}\}$ je lineárně závislá tehdy a jen tehdy, existuje-li množina skalárů $\{c_1, ... ,c_n\}$ s alespoň jedním nenulovým prvkem taková, že $c_1\underline{x}^{(1)} + ... + c_n\underline{x}^{(n)} = 0$.

1.1.2. Maticový počet

Matice typu [*m x n*] je uspořádání *(m.n)* čísel ve tvaru obdélníku majícího *m* řádků a *n* sloupců.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Čísla a_{ij} $(i = 1,...,m; j = 1,...,n)$ nazýváme prvky (nebo též elementy) matice $\underline{A}$. Matice *(m.n)* se nazývá matice typu *m* krát *n*.

Dvě matice jsou si rovny, jsou-li si rovny jejich odpovídající prvky, tj.: $\underline{A} = \underline{B}$ tehdy a jen tehdy, když $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1..m, j = 1..n)$.

Sečíst dvě matice znamená provést součet jejich odpovídajících prvků. Dostáváme $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ tehdy a jen tehdy, když $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro $(i = 1,..m; j = 1,..n)$. Součet dvou matic je definován pouze pro případ, kdy obě matice mají stejný rozměr.

Násobení matice skalárem znamená násobení každého jejího prvku tímto skalárem, tj.: $\underline{B} = c\underline{A}$ tehdy a jen tehdy, když $b_{ij} = ca_{ij}$ $(i = 1,..m; j = 1,..n)$.

Kombinací a rozšířením těchto operací dostáváme lineární kombinaci z množiny matic:
$\underline{B} = c_1\underline{A}^{(1)} + ... + c_p\underline{A}^{(p)}$ tehdy a jen tehdy, když $b_{ij} = c_1 a_{ij}^{(1)} + ... + c_p a_{ij}^{(p)}$ pro $(i=1,..m;j=1,..n)$, kde $a_{ij}^{(p)}$ je *i,j* prvek p-té matice $\underline{A}^{(p)}$ typu [*m x n*].

Z uvedených definic a z vlastností reálných čísel plyne:

$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$
$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$
$c(\underline{A} + \underline{B}) = c\underline{A} + c\underline{B}$
$(c + d)\,\underline{A} = c\underline{A} + d\underline{A}$

Srovnáme-li definované operace s maticemi s operacemi se sloupcovými vektory, zjistíme, že platí pro matice i vektory.

Třetí základní operací s maticemi je **násobení matic**. Součin matice $\underline{A}$ typu *m x n* s maticí $\underline{B}$ typu *n x p* je matice $\underline{C}$ typu *m x p*, jejíž *(i,j)*-tý prvek je součtem n-tice součinů příslušných prvků i-tého řádku matice $\underline{A}$ a j-tého sloupce matice $\underline{B}$, tj.:

$\underline{C} = \underline{AB}$ tehdy a jen tehdy, když $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ $(i = 1,..m, j = 1,..n)$.

Z postupu pro násobení matic je zřejmé, že prvek ležící na průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce matice $\underline{C}=\underline{AB}$ dostaneme jako skalární součin i-tého řádku matice $\underline{A}$ a j-tého sloupce matice $\underline{B}$. Pro součin $\underline{C} = \underline{AB}$ musí mít matice $\underline{B}$ právě tolik řádků, kolik má matice $\underline{A}$ sloupců. Jedině za těchto podmínek lze definovat součin dvou matic.

Z uvedených definic a z vlastností reálných čísel plyne:

$(\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC}) = \underline{ABC}$
$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC}$
$\underline{A}c\underline{B} = c\underline{AB}$

Násobení matic však **není obecně komutativní.** Obecně neplatí rovnost $\underline{BA} = \underline{AB}$. Proto je důležité rozlišovat pořadí násobení matic, zda jde o násobení zleva či zprava a zachovávat pořadí i při dílčích součinech více než dvou matic.

Matici **transponovanou** dostaneme vzájemnou výměnou řádků a sloupců dané matice. Označujeme ji čárkou nebo písmenem T nahoře. Platí, že $\underline{A}^T$ tehdy a jen tehdy, když $a_{ij}^T = a_{ji}$ $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$. Matice transponovaná k transponované matici je rovna matici původní. Je zřejmé, že součet transponovaných matic je roven transponované matici ze součtu těchto matic. Transponovaná matice ze součinu matic je rovna součinu těchto transponovaných matic, ale v obráceném pořadí.

Matice se nazývá **čtvercová**, když má stejný počet řádků a sloupců, tj. když $m=n$. Čtvercová matice se nazývá **symetrickou**, když je rovna matici k ní transponované, tj. platí-li $a_{ij} = a_{ji}$. Čtvercová matice, jejíž všechny prvky na diagonále jsou rovny jedničce a všechny prvky mimo ní pak nule, se nazývá **jednotkovou** maticí. Jednotková matice má stejnou funkci jako jednička v algebře.

Hodnost matice $\underline{A}$ (též Rank) lze definovat jako maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Jelikož platí, že maximální počet lineárně nezávislých řádků matice je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců, lze definici hodnosti formulovat i jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců. Hodnost matice $\underline{A}$ značíme $h(\underline{A})$. Pro matici $\underline{\mathrm{A}}$ typu $m \ x \ n$ tedy platí $h(\underline{A}) \leq \min\{m,n\}$. Hodnost matice lze určit např. pomocí Gaussovy eliminace.

Inversní matice k matici $\underline{A}$ typu $n \ x \ n$ je matice typu $n \ x \ n$, kterou když zprava či z leva vynásobíme maticí původní, dostaneme matici jednotkovou. Matici inversní k matici $\underline{A}$ značíme $\underline{\mathrm{A}}^{-1}$. Je-li matice $\underline{A}$ typu $n \ x \ n$, pak k ní existuje matice inversní tehdy a jen tehdy, když $\underline{A} = 0$, nebo $h(\underline{A}) = n$ nebo matice $\underline{A}$ je regulární. Inversní matice k matici transponované je rovna transponované inversní matici. Je-li matice A symetrická a regulární, pak i $\underline{A}^{-1}$ je symetrická. Jednotková matice je zároveň k sobě inversní. A konečně inversní matice k součinu matic je rovna součinu inversních matic v opačném pořadí, tzn., že jsou-li matice $\underline{A}$ a $\underline{B}$ regulární, pak $\underline{AB}^{-1} = \underline{B}^{-1}\,\underline{A}^{-1}$.

1.2 Praktická cvičení

1. Napište libovolný sloupcový vektor.

2. Napište k němu vektor transponovaný.

3. Proveďte skalární součin zapsaných vektorů.

4. Proveďte následující operace s vektory. Předem určete, zda výsledek bude vektor nebo skalár. Zobecněte podmínky sčítání a násobení vektorů.

$$2\begin{vmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \qquad\qquad 5\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{vmatrix} =$$

5. Napište libovolnou matici typu 2 x 3. Napište k ní jinou matici stejného typu. Proveďte součet obou matic.

6. Lze-li, proveďte součet následujících matic:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

7. Určete, co vznikne vynásobením matic typu:

3x5	x	5x2	=
2x3	x	2x3	=
2x1	x	1x5	=

8. Uveďte velikost následujících matic a zjistěte, jaký rozměr bude mít matice $\underline{C}$ vzniklá jejich vzájemným vynásobením. Lze-li, vyčíslete ji.

a) $\underline{A} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ x $\underline{B} = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ $\underline{C} =$

b) $\underline{A} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ x $\underline{B} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ $\underline{C} =$

c) $\underline{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ x $\underline{B} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $\underline{C} =$

9. Zjistěte, zda pro matice z příkladu číslo 8. platí, že $\underline{A}$ x $\underline{B} \neq \underline{B}$ x $\underline{A}$. Z výsledků odvoďte obecné pravidlo pro násobení matic.

10. Proveďte součin matic $\underline{A}$ x $\underline{B}$ a $\underline{B}$ x $\underline{A}$ pro následující matice, zdůvodněte jejich výsledek a uveďte, čím se liší od bodu číslo 9.

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{x} \quad \underline{B} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ze získaných poznatků vyvoďte obecné pravidlo pro součin čtvercových matic.

11. K následujícím maticím utvořte matice inversní a přesvědčte se o jejich správném tvaru.

a) matice původní

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

matice inversní

$$\underline{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$$

Zkouška:

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{x} \quad \underline{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) $\underline{B} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ $\underline{B}^{-1} =$

c) $\underline{C} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ $\underline{C}^{-1} = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{vmatrix}$

12. Vypočítejte hodnost následujících matic

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

13. Napište první derivaci následujících funkcí

$y = 2x^3 + 3x + 6$

$y' =$

$y = \sqrt{x} + 2\sqrt[2]{x^3}$

$y' =$

$y = 4x\,(2 + 5x^2)$

$y' =$

$y = \left(x^5 + 3x^2 - 2\right)^4$

$y' =$

$$y = \frac{2x^3 + 3}{3x^2}$$

$y' =$

$$y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

$y' =$

$y = e^{5x}$

$y' =$

$y = xe^{4-x}$

$y' =$

$y = \ln x^2$

$y' =$

$y = (\ln x)^2$

$y' =$

$y = \ln(x^2 + 3x + 4)$

$y' =$

Úkoly k samostatnému procvičení

1. Je dána množina bodů o následujících souřadnicích *x* a *y*

	x	**y**									
	1	2									
	2	4									
	3	3									
	4	5									
	5	6									
	6	8									
∑	**21**	**28**									
Ø	**3,5**	**4,66**									

a) Zakreslete body do grafu

b) Vypočítejte rozptyl hodnot závisle proměnné ***y***.

c) Proložte množinou bodů přímky: $\mathbf{y_1 = 2{,}5 + x}$

$\mathbf{y_2 = 3{,}6 + 0{,}4x}$

d) Zakreslete uvedené přímky do grafu a určete, která z nich lépe popisuje vztah mezi skutečnými hodnotami bodů *x* a *y*.
Přesvědčte se, zda mimo dvou výše uvedených přímek existuje některá jiná lineární funkce, která by pole bodů popsala přesněji. K výpočtu jejích parametrů použijte řešení normálních rovnic a běžnou metodu nejmenších čtverců.