

Seminar 6

Two-stage least squares method (TSLSM)

Exercises

1. Estimate parameters of the 1st equation of the following econometric model using TSLSM.

Econometric model:

$$y_{1t} = \beta_{10}y_{3t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \gamma_{13}x_{3t} + \gamma_{14}x_{4t} + \gamma_{110}x_{10t} + \gamma_{111}x_{11t} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \beta_{20}y_{3t} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{5t} + \gamma_{212}x_{12t} + u_{2t}$$

$$y_{3t} = \beta_{30}y_{1t} + \gamma_{31}x_{1t} + \gamma_{315}x_{15t} + u_{3t}$$

$$y_{4t} = y_{1t} + y_{2t} + y_{3t} + x_{13t}$$

Variables:

y_{1t} ...household consumption expenditures in billion CZK

y_{2t} ...fixed capital in billion CZK

y_{3t} ...foreign trade balance in billion CZK

y_{4t} ...GDP in billion CZK

x_{1t} ...unit vector

x_{3t} ...inflation in %

x_{4t} ...interest rate of households in %

x_{5t} ...interest rate of firms in %

x_{10t} ...investments in %

x_{11t} ...unemployment rate in %

x_{12t} ...number of employees in billions

x_{13t} ...government expenditures in billion CZK

x_{15t} ...foreign investments in billion CZK

Data table:

Rok	y1	y2	y3	y4	x1	x3	x4	x5	x10	x11	x12	x13	x15
1992	411,8	285,9	-20,3	846,8	1	11,1	5,4	15,6	33,7	2,7	4,9	169,4	28,4
1993	531,7	289,6	-19,5	1002,3	1	20,8	7,2	14,6	28,4	4,3	4,9	200,5	16,6
1994	592,7	361,2	-39,5	1143,0	1	10,0	7,6	13,9	31,6	4,3	4,9	228,6	24,8
1995	761,9	461,8	-63,5	1466,5	1	9,1	7,2	13,5	31,5	4,0	5	306,3	67,9
1996	900,8	540,4	-98,3	1683,3	1	8,8	7,1	13,1	32,1	3,9	5	340,4	38,8
1997	983,5	542,1	-93,8	1811,1	1	8,5	8,7	13,7	29,9	4,8	4,9	379,3	41,3
1998	1056,1	562,4	-21,7	1996,5	1	10,7	9,4	13,3	28,2	6,5	4,9	399,7	81,9
1999	1102,2	562,3	-24,3	2080,8	1	2,1	9,1	9,0	27,0	8,7	4,8	440,6	168,7
2000	1181,9	612,5	-66,1	2189,2	1	3,9	9,0	7,3	28,0	8,8	4,7	460,9	129,8
2001	1255,0	659,3	-58,8	2352,2	1	4,7	9,0	6,8	28,0	8,1	4,7	496,7	214,6
2002	1288,5	677,8	-51,4	2464,4	1	1,8	8,8	5,9	27,5	7,3	4,8	549,5	277,7
2003	1345,2	687,5	-58,8	2577,1	1	0,1	8,2	4,5	26,7	7,8	4,7	603,2	59,3
2004	1464,1	727,2	1,9	2814,8	1	2,8	8,0	4,8	25,8	8,3	4,7	621,6	114,7
2005	1488,7	746,1	94,7	2987,7	1	1,9	7,2	4,2	24,9	7,9	4,8	658,2	263,2
2006	1622,1	812,9	111,2	3231,6	1	2,5	6,8	4,5	25,2	7,1	4,8	685,4	134,7
2007	1966,1	850,2	29,9	3557,7	1	2,8	8,5	2,1	23,9	5,3	4,9	711,5	218,0

Source: CZSO

1st equation: $y_1 = f(y_3, x_1, x_3, x_4, x_{10}, x_{11})$

a. Declaration of matrices and vectors required for TSLSM

X-					X										Y ₂	Y ₁
x ₁	x ₃	x ₄	x ₁₀	x ₁₁	x ₁	x ₃	x ₄	x ₁₀	x ₁₁	x ₅	x ₁₂	x ₁₃	x ₁₅	y ₃	y ₁	
1	11,1	5,4	33,7	2,7	1	11,1	5,4	33,7	2,7	15,6	4,9	169,4	28,4	-20,3	411,8	
1	20,8	7,2	28,4	4,3	1	20,8	7,2	28,4	4,3	14,6	4,9	200,5	16,6	-19,5	531,7	
1	10,0	7,6	31,6	4,3	1	10,0	7,6	31,6	4,3	13,9	4,9	228,6	24,8	-39,5	592,7	
1	9,1	7,2	31,5	4,0	1	9,1	7,2	31,5	4,0	13,5	5,0	306,3	67,9	-63,5	761,9	
1	8,8	7,1	32,1	3,9	1	8,8	7,1	32,1	3,9	13,1	5,0	340,4	38,8	-98,3	900,8	
1	8,5	8,7	29,9	4,8	1	8,5	8,7	29,9	4,8	13,7	4,9	379,3	41,3	-93,8	983,5	
1	10,7	9,4	28,2	6,5	1	10,7	9,4	28,2	6,5	13,3	4,9	399,7	81,9	-21,7	1056,1	
1	2,1	9,1	27,0	8,7	1	2,1	9,1	27,0	8,7	9,0	4,8	440,6	168,7	-24,3	1102,2	
1	3,9	9,0	28,0	8,8	1	3,9	9,0	28,0	8,8	7,3	4,7	460,9	129,8	-66,1	1181,9	
1	4,7	9,0	28,0	8,1	1	4,7	9,0	28,0	8,1	6,8	4,7	496,7	214,6	-58,8	1255,0	
1	1,8	8,8	27,5	7,3	1	1,8	8,8	27,5	7,3	5,9	4,8	549,5	277,7	-51,4	1288,5	
1	0,1	8,2	26,7	7,8	1	0,1	8,2	26,7	7,8	4,5	4,7	603,2	59,3	-58,8	1345,2	
1	2,8	8,0	25,8	8,3	1	2,8	8,0	25,8	8,3	4,8	4,7	621,6	114,7	1,9	1464,1	
1	1,9	7,2	24,9	7,9	1	1,9	7,2	24,9	7,9	4,2	4,8	658,2	263,2	94,7	1488,7	
1	2,5	6,8	25,2	7,1	1	2,5	6,8	25,2	7,1	4,5	4,8	685,4	134,7	111,2	1622,1	
1	2,8	8,5	23,9	5,3	1	2,8	8,5	23,9	5,3	2,1	4,9	711,5	218,0	29,9	1966,1	

b. 1st stage of TSLSM = calculation of matrix \hat{Y}_2

$$X^T$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	21	10	9,1	8,8	8,5	11	2,1	3,9	4,7	1,8	0,1	2,8	1,9	2,5	2,8
5,4	7,2	7,6	7,18	7,1	8,7	9,4	9,08	9	8,99	8,8	8,24	8	7,2	6,79	8,51
34	28	32	31,5	32	30	28	27	28	28	28	26,7	26	24,9	25,2	23,9
2,7	4,3	4,3	4	3,9	4,8	6,5	8,7	8,8	8,1	7,3	7,8	8,3	7,9	7,1	5,3
16	15	14	13,5	13	14	13	9,02	7,3	6,78	5,9	4,53	4,8	4,2	4,45	2,1
4,9	4,9	4,9	4,96	5	4,9	4,9	4,76	4,7	4,73	4,8	4,73	4,7	4,76	4,83	4,92
169	200	229	306	340	379	400	441	461	497	550	603	622	658	685	712
28	17	25	67,9	39	41	82	169	130	215	278	59,3	115	263	135	218

$$X^T X$$

16	101,6	127,1	452,4	99,8	146,6	77,4	7252	1880
102	1073	777,9	3005	518,9	1240	496,1	34423	7237
127	777,9	1028	3576	813,2	1142	614,4	58585	15499
452	3005	3576	12911	2761	4317	2191	2E+05	50674
99,8	518,9	813,2	2761	683,4	812,5	480,1	48899	13389
147	1240	1142	4317	812,5	1666	713,6	54739	12629
77,4	496,1	614,4	2191	480,1	713,6	374,6	34939	9028
7252	34423	58585	2E+05	48899	54739	34939	4E+06	1E+06
1880	7237	15499	50674	13389	12629	9028	1E+06	3E+05

$$(X^T X)^{-1}$$

3465	-5,746	7,3169	-11,88	-37,76	10,895	-628,1	0,0508	0,0039
-5,75	0,0295	-0,004	0,055	0,0658	-0,026	0,745	0,0006	7E-05
7,317	-0,004	0,133	0,007	-0,129	-0,004	-1,608	0,0003	-3E-04
-11,9	0,0547	0,0067	0,148	0,1247	-0,054	1,308	0,0015	0,0001
-37,8	0,0658	-0,129	0,125	0,4666	-0,108	6,863	-6E-04	-9E-05
10,9	-0,026	-0,004	-0,054	-0,108	0,0945	-2,049	0,0011	0,0004
-628	0,7451	-1,608	1,308	6,8627	-2,049	121,5	-0,027	-0,003
0,051	0,0006	0,0003	0,001	-6E-04	0,0011	-0,027	6E-05	5E-06
0,004	7E-05	-3E-04	1E-04	-9E-05	0,0004	-0,003	5E-06	2E-05

$$X(X^T X)^{-1}$$

23,14	-0,052	-0,075	-0,058	-0,247	0,0663	-4,021	-4E-04	0,0006
6,398	0,0475	-0,017	-0,068	-0,02	-0,04	-0,721	-0,001	-2E-04
-6,23	-0,025	0,0135	-0,035	0,0423	-0,074	1,896	-0,003	-8E-04
-14,3	0,0092	-0,043	0,051	0,1207	-0,025	2,622	-2E-04	0,0003
-25,4	0,0612	-0,04	0,19	0,2346	-0,067	3,794	0,0018	-2E-04
11,31	-0,034	0,1164	-0,047	-0,185	0,1255	-2,387	0,0021	-5E-04
1,944	0,0175	0,0828	7E-05	-0,017	0,1217	-1,041	0,003	0,0002
-0,79	-0,092	-0,058	-0,208	0,0773	0,0491	1,795	-0,004	0,0003
-25,1	0,0517	-0,013	0,126	0,3366	-0,15	4,444	-0,002	-8E-04
-3,75	0,0651	0,0751	0,166	0,0554	-0,065	-0,492	0,0013	0,0012
17,51	-0,014	0,1065	0,017	-0,234	0,0403	-3,763	0,0008	0,0023
20,48	-0,048	0,0893	-0,049	-0,218	-0,006	-3,628	-3E-04	-0,003
15,23	0,0052	0,0042	0,012	-0,108	0,0361	-3,292	0,0018	-0,001
0,654	-0,006	-0,169	-0,049	0,0548	0,0757	0,119	0,0007	0,002
-15,7	0,0247	-0,184	0,022	0,2182	0,0085	2,99	0,0014	-5E-04
-4,42	-0,011	0,1108	-0,07	-0,11	-0,098	1,686	-0,002	-6E-05

$$X(X^T X)^{-1} X^T$$

0,69	0,1	0,18	0,16	0,076	0,039	-0,17	-0,01	-0,19	-0,05	0,148	0,089	0,047	0,11	-0,04	-0,16
0,1	0,9	0,11	-0,03	-0,11	-0,07	0,134	-0,06	0,04	0,045	-0,111	-0,08	0,077	0,02	-0,01	0,069
0,18	0,11	0,33	0,17	0,121	0,038	-0,077	0,198	0,16	-0,04	-0,051	0,087	-0,1	-0,15	-0,09	0,105
0,16	-0,03	0,17	0,24	0,284	0,093	0,033	0,036	0,06	0,006	-0,004	-0,1	-0,11	0,03	0,08	0,056
0,08	-0,11	0,12	0,28	0,491	0,093	0,055	-0,21	0,15	0,1	-0,071	-0,07	-0,05	-0,05	0,18	6E-04
0,04	-0,07	0,04	0,09	0,093	0,474	0,397	0,053	-0,17	-0,08	0,056	0,111	0,042	-0,1	-0,04	0,048
-0,17	0,13	-0,08	0,03	0,055	0,397	0,565	0,075	-0,03	0,066	0,037	-0,07	0,064	0,01	0,01	-0,1
-0,01	-0,06	0,2	0,04	-0,21	0,053	0,075	0,77	0,17	-0,11	0,025	0,023	-0,08	0,17	-0,01	-0,03
-0,19	0,04	0,16	0,06	0,154	-0,168	-0,033	0,173	0,54	0,273	-0,04	0,085	0,056	-0,06	0,04	-0,07
-0,05	0,04	-0,04	0,01	0,1	-0,076	0,066	-0,11	0,27	0,473	0,332	-0,02	0,099	0,05	-0,11	-0,04
0,15	-0,11	-0,05	0	-0,07	0,056	0,037	0,025	-0,04	0,332	0,545	-0,02	0,032	0,17	-0,19	0,147
0,09	-0,08	0,09	-0,1	-0,07	0,111	-0,074	0,023	0,08	-0,02	-0,018	0,643	0,363	-0,16	0,05	0,081
0,05	0,08	-0,1	-0,11	-0,05	0,042	0,064	-0,08	0,06	0,099	0,032	0,363	0,377	0,09	0,17	-0,08
0,11	0,02	-0,15	0,03	-0,05	-0,095	0,01	0,167	-0,06	0,046	0,169	-0,16	0,086	0,53	0,33	0,022
-0,04	-0,01	-0,09	0,08	0,179	-0,035	0,013	-0,01	0,04	-0,11	-0,194	0,049	0,175	0,33	0,55	0,073
-0,16	0,07	0,11	0,06	6E-04	0,048	-0,095	-0,03	-0,07	-0,04	0,147	0,081	-0,08	0,02	0,07	0,881

$$\hat{Y}_2 = X(X^T X)^{-1} X^T Y_2$$

-36,6981711
1,644228681
-79,8573837
-47,9756123
-68,1384075
-75,7000274
-54,5791802
-6,74333753
-67,8641829
-70,5539121
-43,1780061
-46,8330777
3,000954113
100,967747
90,33065533
23,75924669

c. 2nd stage of TSLSM = estimation of the parameters β and γ

\hat{Y}_2^T	-37	1,64	-80	-48	-68	-75,7	-54,6	-6,7	-67,9	-70,6	-43	-46,8	3	101	90,3	23,76
X^T	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	11	20,8	10	9,1	8,8	8,5	10,7	2,1	3,9	4,7	1,8	0,1	2,8	1,9	2,5	2,8
	5,4	7,2	7,56	7,18	7,05	8,72	9,43	9,08	8,95	8,99	8,84	8,24	7,96	7,2	6,79	8,512
	34	28,4	31,6	31,5	32,1	29,9	28,2	27	28	28	27,5	26,7	25,8	24,9	25,2	23,9
	2,7	4,3	4,3	4	3,9	4,8	6,5	8,7	8,8	8,1	7,3	7,8	8,3	7,9	7,1	5,3

Y_2^T	-20,3	-19,5	-39,5	-63,5	-98,3	-93,8	-21,7	-24,3	-66,1	-58,8	-51,4	-58,8	1,91	94,7	111	29,86
---------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	------	-----	-------

$$K$$

55994,717	-378,41847	-3635,6116	-3295,1983	-12274,479	-1929,1999
-378,41847	16	101,6	127,1421	452,4	99,8
-3635,6116	101,6	1073,34	777,88187	3004,95	518,9
-3295,1983	127,1421	777,88187	1027,9791	3575,6161	813,1721
-12274,479	452,4	3004,95	3575,6161	12910,76	2760,55
-1929,1999	99,8	518,9	813,1721	2760,55	683,44

$$K^{-1}$$

0,0001769	-0,143874	-0,0001922	0,0067737	0,0034579	-0,0003722
-0,143874	141,171	0,1359261	-5,9801548	-3,4004053	-0,2737268
-0,0001922	0,1359261	0,0051875	-0,0110634	-0,0051446	0,0096137
0,0067737	-5,9801548	-0,0110634	0,3530869	0,132019	-0,052583
0,0034579	-3,4004053	-0,0051446	0,132019	0,085409	0,0081515
-0,0003722	-0,2737268	0,0096137	-0,052583	0,0081515	0,0627236

-1E-04	-0,002	-0,001	0,002	-3E-04	0,002	0,003	0,006	-0,002	-0,003	0,0004	-0,007	-0,004	0,006	0,002	-0,002
0,0949	2,956	0,1799	-1,835	-0,21	-1,92	-3,59	-6,066	0,322	0,7706	-0,746	5,72	3,515	-2,987	0,276	4,509
-0,007	0,059	-0,002	-0,011	-0,011	-0,01	0,015	-0,008	0,011	0,0082	-0,016	-0,008	0,009	-0,005	-0	-0,02
-0,124	-0,134	-0,017	0,078	-0,017	0,187	0,243	0,264	-0,089	-0,065	0,0754	-0,274	-0,211	0,097	-0,04	0,032
0,0341	-0,091	0,004	0,058	0,023	0,038	0,062	0,141	-0,01	-0,024	0,0163	-0,131	-0,082	0,081	0,006	-0,124
0,0047	0,048	-0,018	-0,038	-0,028	-0,08	-0,01	0,037	0,099	0,0613	-0,023	0,018	0,064	0,027	0,01	-0,176

The final vector of estimated parameters is following:

-1,07	β_{13}
5868,90	γ_{11}
-43,42	γ_{13}
9,53	γ_{14}
-142,12	γ_{110}
-88,78	γ_{111}

Then, the estimated equation is following:

$$\hat{y}_{1t} = -1,07y_{3t} + 5868,9 - 43,42x_{3t} + 9,53x_{4t} - 142,12x_{10t} - 88,78x_{11t}$$

Control calculation: LS = RS
1122 = 1122.

Individual exercises

1. Estimate parameters of the 2nd equation of the model specified in exercise 1 using TSLSM.
2. Estimate parameters of the 3rd equation of the model specified in exercise 1 using TSLSM.
3. Estimate parameters of the following equation $y_{1t} = f(y_{2t}, x_{1t}, x_{2t}) + u$ using TSLSM, if:

$$\begin{array}{c} \hat{Y}_2 \\ \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} X_* \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} y_1 \\ \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} K^{-1} \\ \left| \begin{array}{ccc} 0,24 & 0,08 & -0,1 \\ 0,08 & 2,36 & -1 \\ -0,1 & -1,04 & 0,56 \end{array} \right| \end{array}$$

4. Quantify matrix \mathbf{K} , if:

$$\begin{array}{c} \hat{Y}_2 \\ \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} X_* \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Note: $\mathbf{Y}_2^T \mathbf{X}_* = \hat{\mathbf{Y}}_2^T \mathbf{X}_*$ and $\mathbf{X}_*^T \mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_*^T \hat{\mathbf{Y}}_2$.

5. Quantify vector \hat{Y}_2 , if:

$$\begin{array}{c} X \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2,5 \\ 1 & 1,5 & 2 \\ 1 & 2,5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} Y_2 \\ \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right| \end{array}$$

6. Quantify matrix \mathbf{K} , if:

$$\begin{array}{c} \hat{Y}_2 \\ \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} X_* \\ \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array} \right| \end{array}$$

7. Define the size of matrix \mathbf{K} if the size of matrix $\hat{\mathbf{Y}}_2$ is [15x2] and the size of matrix \mathbf{X}_* [15x3].
8. Define the size of matrix \mathbf{K} if the estimated equation contains 5 predetermined variables and 1 explanatory endogenous variable. The time series contain 7 observations.