

Mechanika tuhého tělesa



Česká zemědělská univerzita v Praze

**Technická
fakulta**



2



Základní pojmy:

- Tuhé těleso - nedeformovatelné
- Hmotný bod má hmotnost, ale zanedbatelné rozměry.
- Soustava hmotných bodů se skládá z více hmotných bodů, které mohou být propojeny silami.

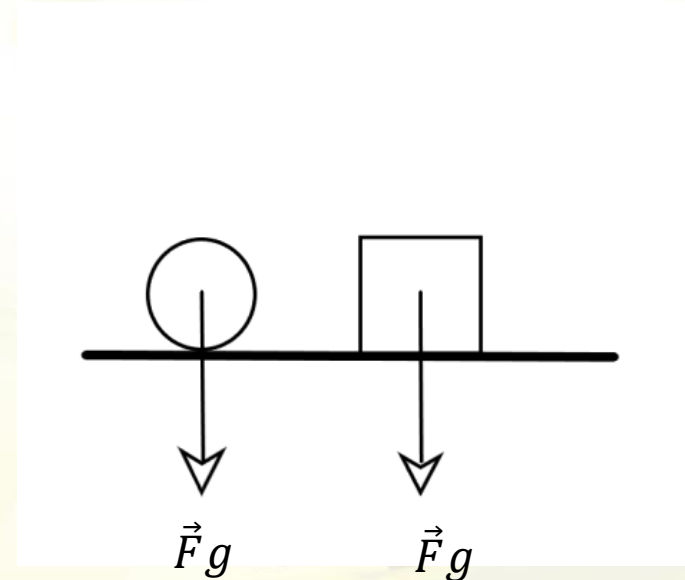
- **Těžiště tuhého tělesa**

Bod, kterým prochází výslednice všech tíhových sil působících na těleso.

Svislá přímka procházející těžištěm se nazývá těžnice. Těleso má pouze jedno těžiště, které může být orientováno mimo těleso.

- **Pohyb tuhého tělesa**

Rozlišujeme **posuvný (translační) pohyb**, kdy se všechny body tělesa pohybují stejně, a **otáčivý (rotační) pohyb**, kdy se body otáčejí kolem pevné osy.



Úvod do mechaniky tuhého tělesa

- Mechanika tuhého tělesa je část mechaniky, která studuje pohyb a rovnováhu objektů, jejichž tvar a rozměry jsou významné.
- Na rozdíl od hmotného bodu, který je idealizovaným bodem s hmotností, ale bez rozměrů, nyní tuhé těleso tzv. ideální, jehož tvar ani objem se účinkem vnějších sil **nemění = nedeformuje**
- Vnější síly - způsobují změnu pohybu

Předpoklady pro studium mechaniky tuhého tělesa:

- Těleso je dokonale tuhé (tj. neprochází deformací).
- Pohyb se rozkládá na posuvný, otáčivý a valivý.
- Síly působící na těleso mohou způsobit změnu jeho pohybu.



Moment hybnosti \vec{b}

- Vektorová fyzikální veličina
- Je mírou otáčivého pohybu tělesa = popisuje množství rotačního pohybu tělesa.
- Moment hybnosti je vektorová veličina – jeho směr určuje pravidlo pravé ruky: pokud prsty pravé ruky směřují ve směru otáčení tělesa, natažený palec ukazuje směr momentu hybnosti.
- Jednotka $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

Pro hmotný bod: $\vec{b} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$

Pro tuhé těleso: $\vec{b} = J \cdot \vec{\omega}$

\vec{r} polohový vektor hmotného bodu vzhledem k ose otáčení,

U translačního (posuvného) pohybu se hybnost značila $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$



Zákon zachování momentu hybnosti

Podobně jako u hybnosti platí i zde zákon zachování, který říká, že pokud na soustavu nepůsobí žádný vnější moment síly, její moment hybnosti zůstává konstantní:

$$\vec{b} = \text{konst.}$$

- To znamená, že pokud těleso rotuje a dojde ke změně jeho momentu setrvačnosti, úhlová rychlost se změní tak, aby se zachoval moment hybnosti:

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$

- Klasický příklad je krasobruslař nebo gymnasta – když přitáhne ruce, sníží moment setrvačnosti, a tím se zvýší jeho úhlová rychlost.



Posuvný pohyb tuhého tělesa

- Všechny body tělesa se pohybují po stejných trajektoriích se stejnou rychlostí i zrychlením.
- Vztahy mezi rychlostí, zrychlením a silou:
Newtonovy pohybové zákony: $F = m \cdot a$



Otáčivý pohyb tuhého tělesa

- Popis rotačního pohybu kolem pevné osy: rovnoměrný a nerovnoměrný
- Každý bod tělesa opisuje kružnici kolem pevné osy otáčení.
- Úhlová dráha (φ), obdoba dráhy s
- Úhlová rychlost (ω): udává rychlost změny úhlu otočení tělesa.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ [Rad.s}^{-1}\text{]}$$

- Úhlové zrychlení (ε): udává změnu úhlové rychlosti v čase.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ [Rad.s}^{-2}\text{]}$$

- Obvodová rychlost (v): Rychlost bodu v tuhém tělese ve vzdálenosti r od osy otáčení
- Znamená to, že čím je bod dále od osy, tím větší má rychlost.
Např. okraj kola rotujícího kolem osy se pohybuje rychleji než bod blíže ke středu.

$$v = \omega \cdot r$$

- Převody v mechanice: umožňují přenos pohybu mezi různými částmi strojů.

a) Ozubené převody (soukolí) – vztah mezi otáčkami dvou kol:

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Pokud jedno kolo pohání druhé, jejich obvodové rychlosti jsou stejné, což dává tento vztah. Malé kolo se otáčí rychleji než velké. Pokud se zmenší poloměr r_1 , zvětší se úhlová rychlost ω_1 .

b) Řemenové převody – přenos síly pomocí tření mezi řemenem a dvěma koly (např. v motorech a strojích).

Řemen obepíná dvě kladky a přenáší pohyb bez přímého dotyku zubů jako u ozubených převodů. Obvodové rychlosti obou kol jsou stejné, takže platí stejný vztah jako u ozubených kol:

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Plynulý přenos pohybu, možnost skluzu při přetížení (ochrana proti přetížení).



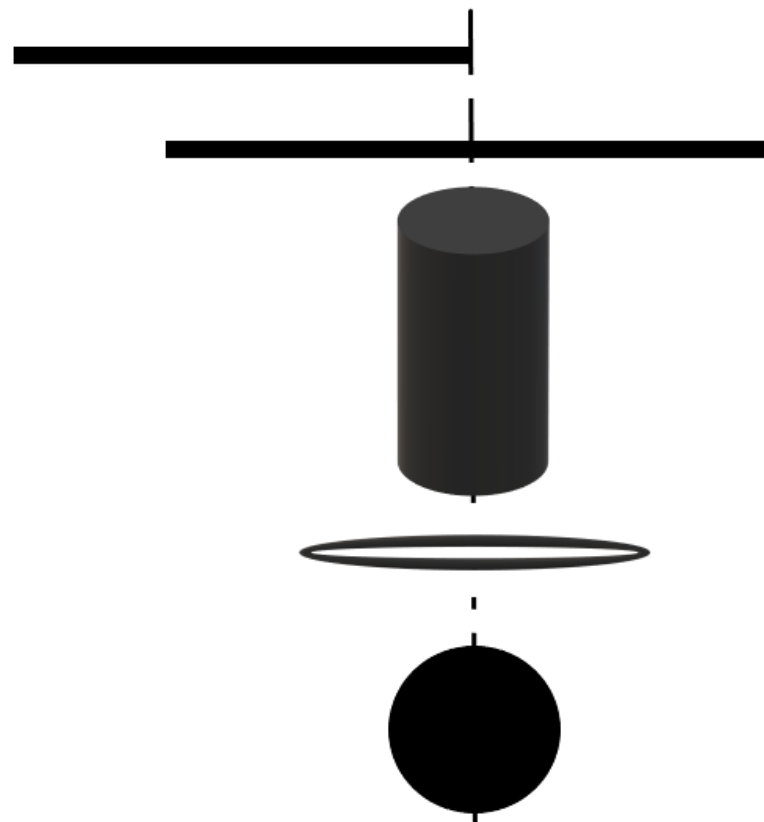
Moment setrvačnosti J

- Moment setrvačnosti je skalární fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu = neboli charakterizuje odpor tělesa proti změně rotačního pohybu
 - Velikost míry setrvačnosti závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení.
 - Body tělesa s větší hmotností a umístěné dál od osy mají větší moment setrvačnosti
 - Jednotka - $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
- Všechny vzorce odvozeny z integrace

$$J = \int r^2 dm$$



Těleso	Osa otáčení	Moment setrvačnosti
Tenká tyč	Osa o je kolmá na tyč v koncovém bodě.	$\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$
Tenká tyč	Osa o je kolmá na tyč v jejím středu.	$\frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$
Rotační válec	Osa o je totožná s osou válce.	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$
Tenký prstenec	Osa o je kolmá na rovinu ve středu tělesa.	$m \cdot r^2$
Koule	Osa o prochází středem koule.	$\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$



Steinerova věta – Moment setrvačnosti

Steinerova věta nám umožňuje přepočítat moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k jiné ose rotace, pokud známe moment setrvačnosti vzhledem k těžišti.

$$J = J_T + m \cdot a^2$$

- Moment setrvačnosti závisí na tom, kolem které osy se těleso otáčí.
 - Výpočet momentu setrvačnosti je obvykle jednodušší kolem osy procházející těžištěm.
- Steinerova věta nám umožňuje přepočítat moment setrvačnosti, pokud osa rotace neleží v těžišti tělesa.
- Čím dál je osa od těžiště, tím větší je moment setrvačnost.

Kde:

J je moment setrvačnosti tělesa vztažený k nové ose

J_T je moment setrvačnosti tělesa vztažený k rovnoběžné ose procházející těžištěm.

m je hmotnost tělesa

a^2 , r^2 , d^2 je druhá mocnina vzdálenosti mezi těžišťovou osou a novou osou.



Setrvačník

- Tuhé těleso s velkým momentem setrvačnosti, které se může setrvačně otáčet, a tak nahromadit kinetickou energii
- Těleso, které se otáčí kolem pevného bodu.
- rotačně symetrické těleso, které má výrazně největší moment setrvačnosti vůči rotační ose a tím také při rotaci velkou kinetickou energii (látka tělesa je rozložena symetricky kolem osy otáčení a přitom co nejdále od osy).
- Viz Kinetická energie rotačního pohybu



Moment síly \vec{M}

- vektorová fyzikální veličina vyjadřující otáčivý účinek síly působící na tuhé těleso, které se otáčí kolem nehybné osy
- Jednotka – N.m (newtonmetr)
- Otáčivý účinek síly závisí na velikosti síly, jejím směru a na poloze působišť:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot d$$

Pohybová rovnice rotačního pohybu (obdoba Newtonova zákona síly):

$$\vec{M} = J \cdot \varepsilon$$

- Znění momentové věty:

Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy se ruší, jestliže vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose otáčení je nulový vektor. Konzervativní a nekonzervativní síly

Konzervativní síly (např. gravitace) uchovávají mechanickou energii, zatímco nekonzervativní síly (tření) ji rozptylují.

d = rameno
síly
 r = polohový
vektor
působišť
síly
vzhledem
k ose
otáčení



Kinetická energie rotačního pohybu

- **Kinetická energie rotačního pohybu**

$$E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Vzorec vyjadřuje energii, kterou má těleso díky své rotaci. Například rotující setrvačnick má energii, i když se neposouvá.

- **Celková kinetická energie tuhého tělesa**

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

m je hmotnost tělesa (kg),

v_T^2 je rychlost těžiště tělesa (m/s),

$J \cdot \omega^2$ je rotační energie.

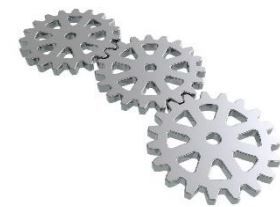
Vzorec platí pro těleso, které se nejen otáčí, ale zároveň se posouvá.

Například valící se kolo má translační kinetickou energii $\frac{1}{2} m \cdot v_T^2$ a rotační

kinetickou energii $\frac{1}{2} J \cdot \omega^2$



Rovnováha tuhého tělesa - Statika



- Zkoumá jevy statické – tj. stavy rovnováhy těles, kapalin a plynů, na které působí vnější síly, a hledá zákonitosti této rovnováhy

Translační rovnováha I.: Součet všech vnějších sil, působících na těleso musí být roven nule.

$$\sum \vec{F} = 0$$

Rotační rovnováha II.: Součet momentů všech vnějších sil, působících na těleso musí být roven nule.

$$\sum \vec{M} = 0$$



Jednoduché stroje



Česká zemědělská univerzita v Praze

**Technická
fakulta**



16



Páka a zákon rovnováhy na páce

- Rameno síly se zvětší, čímž se sníží potřebná síla (Houpačka, kleště, nůžky, otvírák na lahve)
- Druhy pák podle polohy osy otáčení:
 - a) Dvozzvratná páka – osa otáčení je mezi působícími silami (houpačka, nůžky, kleště) a
 - b) Jednozzvratná páka – osa otáčení je na jednom konci páky (kladivo, při vytahování hřebíku, kolečko, otvírák na lahve)
- Zákon rovnováhy na páce: páka je v rovnováze, pokud součet momentů sil na jedné straně osy otáčení je roven součtu momentů sil na druhé straně $M_1=M_2$

Matematicky lze tento zákon vyjádřit jako:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

F_1 a F_2 jsou síly působící na páku,

r_1 a r_2 jsou vzdálenosti (ramena) těchto sil od osy otáčení.

- Podmínka rovnováhy:

Pokud platí: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$, páka se nepohybuje – je v rovnováze.

Pokud naopak platí: $F_1 \cdot r_1 > F_2 \cdot r_2$ nebo $F_1 \cdot r_1 < F_2 \cdot r_2$ dochází k otáčení páky ve směru většího momentu síly.

Praktické využití zákona páky:

- Usnadňuje zvedání těžkých předmětů (čím delší rameno, tím menší sílu potřebujeme).
- Funguje v mechanických nástrojích jako kleště, nůžky, zvedáky.
- Používá se v biomechanice – svaly a kosti fungují jako páky v lidském těle.



Kladka

- mění směr síly

Druhy:

- Pevná kladka – mění směr síly, ale nemění její velikost (např. vlajkový stožár).
- Volná kladka – snižuje potřebnou sílu na polovinu (např. stavební jeřáb).
- Kladkostroj – kombinace pevných a volných kladek pro ještě větší úsporu síly.



Nakloněná rovina

Snižuje potřebnou sílu tím, že zvětšuje dráhu (Rampa, šroub, klín)

- Výpočet síly na nakloněné rovině:

$$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

kde α je úhel sklonu.



Klín

- Přeměňuje sílu působící kolmo na klín na boční síly.
- Příklad: Sekera, dláto, hřebík.



Kolo na hřídeli

- Malá síla na větším poloměru vyvolává větší sílu na menším poloměru.
- Příklad: Volant auta, vodní mlýn.

Šroub

- Převádí rotační pohyb na posuvný.
- Příklad: Závitová tyč, hever.



Příklad 1

Máme dvě bodové hmoty a naším cílem je zjistit polohu těžiště:

$m_1=4\text{kg}$ v bodě $x_1=2\text{ m}$

$m_2=6\text{kg}$ v bodě $x_2=8\text{ m}$

$$x_T = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_T = \frac{4 \cdot 2 + 6 \cdot 8}{4 + 6}$$

$$x_T = 5,6\text{ m}$$



Příklad 2

Vypočítejte moment setrvačnosti tenké tyče délky $l=2$ m a hmotnosti $m=5$ kg vzhledem k ose procházející jejím středem.

Vzorec pro moment setrvačnosti tenké tyče kolem středu je:

$$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

$$J = \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 2^2$$

$$J = 1,67 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Příklad 3

Kolo o poloměru $r=0.5$ m se otáčí úhlovou rychlostí $\omega=10$ rad/s.
Jaká je obvodová rychlost jeho bodu na okraji?

Obvodová rychlost se vypočítá jako:

$$v = \omega \cdot r$$

$$v = 10 \cdot 0,5$$

$$v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Příklad 4

Na páku dlouhou 1.2 m působí síla $F=15$ N kolmo na páku ve vzdálenosti 0.8 m od osy otáčení.
Jaký je moment síly?

$$M = F \cdot d$$

$$M = 15 \cdot 0,8$$

$$M = 12 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Příklad 5

Válec o momentu setrvačnosti $J=2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ se otáčí rychlostí $\omega=4 \text{ rad/s}$. Jaká je jeho rotační kinetická energie?

$$E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2$$

$$E_k = 16 \text{ J}$$



Příklad 6

Kolo se otáčí z klidu a po 5 s dosáhne úhlové rychlosti 10 rad/s. Jaké je jeho úhlové zrychlení?

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{10 - 0}{5}$$

$$\varepsilon = \frac{10 - 0}{5}$$

$$\varepsilon = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$



Příklad 7

Na kliku dveří vzdálenou 90 cm od veřejí (svislé části dveřní nebo okenní zárubně), působí člověk silou 60 N. Vypočítejte moment této síly vzhledem k ose otáčení, působí-li síla kolmo k rovině dveří.

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$$

kde:

$F=60$ N je působící síla,

$r=0,90$ m je vzdálenost kliky od osy otáčení (rameno síly),

$\alpha=90^\circ$ je úhel mezi silou a ramenem (síla působí kolmo na dveře, tedy $\sin 90^\circ=1$).

$$M = 60 \cdot 0,9 \cdot \sin 90^\circ$$

$$M = 54 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Příklad 8

Na klíč na utahování šroubů působí automechanik silou o velikosti 400 N kolmo k ose klíče ve vzdálenosti 17 cm od osy šroubu. Určete moment síly vzhledem k ose.

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$$

kde:

$F=400$ N (působící síla),

$r=17$ cm =0,17 m (rameno síly),

$\alpha=90^\circ$ (síla působí kolmo, takže $\sin 90^\circ=1$).

$$M = 400 \cdot 0,17 \cdot \sin 90^\circ$$

$$M = 68 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Příklad 9

Vypočítejte velikost třecí síly působící u kola motocyklu, je-li průměr brzdného kotouče 16 cm a velikost momentu této brzdící síly je 60 N.m.

Brzdná síla působí na kotouč ve směru tečném ke kruhu brzdného kotouče, tedy kolmo k poloměru kotouče. To znamená, že úhel mezi silou a ramenem je 90°. Vzorec pro moment síly tedy bude:

$$M = F \cdot r$$

kde:

$M=60 \text{ N}\cdot\text{m}$ (moment síly),

$d=16 \text{ cm} = 0,16 \text{ m}$ (průměr brzdného kotouče) $\rightarrow r=8 \text{ cm}=0,08 \text{ m}$

F je hledaná třecí síla.

$$M = F \cdot r \rightarrow F = \frac{M}{r}$$

$$F = \frac{60}{0,08}$$

$$F = 750 \text{ N}$$



Příklad 10

Síla o velikosti 0,6 kN působí otáčivým momentem 2100 N.m. Jaké je rameno této síly?

Pokud by síla nepůsobila kolmo, museli bychom použít obecný vzorec: $M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$

Ale protože není uvedeno, že síla působí pod nějakým jiným úhlem, automaticky předpokládáme, že působí kolmo.

$$M = F \cdot r$$

kde:

$M=2100$ N·m (moment síly),

$F=0,6$ kN = 600 N (síla),

r je hledané rameno síly.

$$r = \frac{M}{F}$$

$$r = \frac{2100}{600}$$

$$r = 3,5 \text{ m}$$



Příklad 11

Kámen o hmotnosti 4,5 kg je ve vodě nadlehčován silou 20 N. Určete velikost a směr výsledné síly působící na kámen.

$$F_g = m \cdot g$$

kde:

$m = 4,5$ kg (hmotnost kamene),

$g = 9,81$ m/s² (tíhové zrychlení).

$$F_g = 4,5 \cdot 9,81$$

$$F_g \approx 44,1 \text{ N}$$

Vztlaková síla působící proti tíhové síle:

$$F_v = 20 \text{ N}$$

Výsledná síla je dána rozdílem tíhové síly a vztlakové síly:

$$F = F_g - F_v$$

$$F = 44,1 - 20$$

$$F \approx 24,1 \approx 25 \text{ N}$$

Směr výsledné síly:

Tíhová síla je větší než vztlaková síla, takže kámen bude klesat dolů.



Příklad 12

Jakou práci musíme vykonat, abychom setrvačnick s momentem setrvačnosti $20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ roztočili s frekvencí 120 s^{-1} ?

Práce W , kterou musíme vykonat k roztočení setrvačnicku, se rovná jeho rotační kinetické energii: $E_k = \frac{1}{2}J \cdot \omega^2$

Frekvence f souvisí s úhlovou rychlostí ω vztahem $\omega = 2\pi f$

$$\omega = 2\pi \cdot 120 = 240\pi = 753,98 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 753,98^2 = 5,7 \text{ MJ}$$



Příklad 13

Jakou rychlost získá koule, která se kutálí po nakloněné rovině z výšky 1 m? Moment setrvačnosti stejnorodé koule o hmotnosti m a poloměru r vzhledem k ose otáčení procházející jejím středem $J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$, tíhové zrychlení je $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Tření neuvažujeme.

Pokud neuvažujeme tření, pohyb je valivý.

Celková mechanická energie tělesa se **nezmění**, protože tření neodebírá energii: $E_p = E_k + E_r$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Protože koule se **valí bez skluzu**, platí vztah mezi **úhlovou rychlostí** ω a **rychlostí těžiště** v vztah: $v = r \cdot \omega$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Dosadíme tedy do výrazu pro rotační energii: $E_r = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}$

Po zkrácení $E_r = \frac{1}{5} m \cdot v^2$

Rovnice pro celkovou energii: $m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{5} m \cdot v^2$

$$m \cdot g \cdot h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) m \cdot v^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \left(\frac{5}{10} + \frac{2}{10} \right) m \cdot v^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \left(\frac{7}{10} \right) m \cdot v^2$$

$$g \cdot h = \left(\frac{7}{10} \right) \cdot v^2$$

$$v^2 = \frac{10}{7} g \cdot h$$

$$v^2 = \frac{10}{7} \cdot 10 \cdot 1 = \frac{100}{7}$$

$$v = \sqrt{14,285} = 3,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$