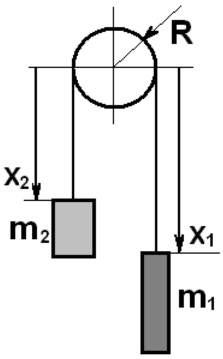
Cvičení 1

1 Diskutujte stavové parametry, které můžeme přiřadit fyzikálnímu systému, tvořeným hmotným bodem.
2 Diskutujte stavové parametry, které můžeme obecně přiřadit termodynamickému systému.
3 Diskutujte stavové parametry fyzikálního systému, tvořeného planetou Země, popř. Sluneční soustavou.
4 Diskutujte zvláštnosti fyzikální soustavou tvořenou celým vesmírem.
5 Prostřednictvím polohového vektoru popište body, které leží na kruhové trajektorii o poloměru 4 v rovině dané vektory base $\vec{e}_1$ *a* $\vec{e}_2$ a její střed je dán polohovým vektorem $6\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2$.

6 Těleso o hmotnosti m_1 a těleso o hmotnosti m_2 jsou spojeny nehmotným, neprodlužujícím se vláknem délky l, vedeným přes nehmotnou kladku o poloměru R, která se volně otáčí bez tření (viz. obr. 1) Takovéto uspořádání se nazývá Atwoodův padostroj. Určete pohyb obou těles.



Řešení:

a/ Newtovské řešení založené na řešení pohybových rovnic pro obě tělesa (Roubík, Sedláček, 2007 př. 3.6):

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (C1.6.1)$$

$$F_t = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (C1.6.2)$$

kde rov. (C1.6.1) dává vztah pro zrychlení tělesa m_1 a rovnice (C1.6.2) je vztahem pro sílu vazby (v laně) mezi oběma tělesy.

b/ Aplikace Lagrangeova přístupu:

Podle našeho předpokladu se délka l vlákna nemění, což se dá vyjádřit následující holonomní vazbovou podmínkou:

$x_1 + x_2 + \pi R = l$ *, vyjádřenou ve tvaru:*

$$x_2 = -x_1 + (l - \pi R) = -x_1 + C \qquad (C1.6.3)$$

Naše úloha má tedy pouze jeden stupeň volnosti vyjádřený např. zobecněnou souřadnicí x_1.

Derivací rov. (C1.6.3) získáme rovnici: $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$. Nyní můžeme vyjádřit kinetickou energii:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^{\,2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^{\,2} \qquad (C1.6.4)$$

a potenciální energii:

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -(m_1 - m_2) g x_1 \qquad (C1.6.5)$$

Lagrangeova funkce je L = T – U, platí tedy:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^{\,2} + (m_1 - m_2) g x_1 \qquad (C1.6.6a)$$

a

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 - m_2) g \qquad (C1.6.6b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 \qquad (C1.6.6c)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}_1\right] = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 \qquad (C1.6.6d)$$

Dosazením vztahů (C1.6.6d) a (C1.6.6b) do Eulerovy-Lagrangeovy rovnice $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

získáme konečnou rovnici:

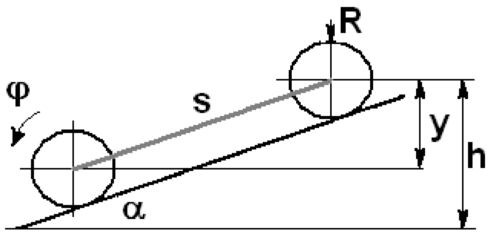
$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - (m_1 - m_2) g = 0 \qquad (C1.6.7a)$$

a tedy i řešení úlohy:

$$\ddot{x}_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g \qquad \text{(C1.6.7b)}$$

Tento jednoduchý příklad ukazuje jak Lagrangeův přístup umožňuje ignorovat přítomnost neznámých sil (síla ve vlákně) souvisejících s vazbou a eliminovat tak část výpočtů. Tyto výpočty mohou být ve složitějších případech podstatně omezující. Vhodnou volbou m_1 a m_2 můžeme dosáhnout hodnoty zrychlení $\ddot{x}_1$ mnohem menší než g, a proto lépe měřitelného. Atwoodův padostroj dává vhodnou a přesnou metodu měření g.

7 Je dána nakloněná rovina se sklonem α. Po rovině se valí bez prokluzu válec o poloměru R a hmotnosti m (viz obrázek). Najděte příslušnou pohybovou rovnici.



Řešení:
Protože se válec valí bez prokluzu, má úloha jen jeden stupeň volnosti. Zobecněné souřadnice s a φ jsou vázány vztahem R.dφ = ds a tak máme pouze jednu nezávislou zobecněnou souřadnici. Zvolíme-li za ní polohu válce , kterou určuje dráha s, obdržíme:

rychlost pohybu středu válce : $v = \dot{s}$

úhlovou rychlost válce: $\omega = \frac{v}{R} = \frac{\dot{s}}{R}$

Kinetická energie válce:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} J \frac{\dot{s}}{R^2}^2 = \frac{1}{2} \frac{mR^2 + J}{R^2} \dot{s}^2 \qquad \text{(C1.7.1)}$$

kde J je moment setrvačnosti válce
Potenciální energie válce je:

$$U = mg(h - y) = mg(h - s \sin\alpha) \qquad \text{(C1.7.2)}$$

Dosazením do Lagrangeovy funkce L = T – U dostáváme:

$$L = T - U = \frac{mR^2 + J}{2R^2} \dot{s}^2 + mgs \sin\alpha - mgh$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = mg \sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{mR^2 + J}{R^2} \dot{s}$$

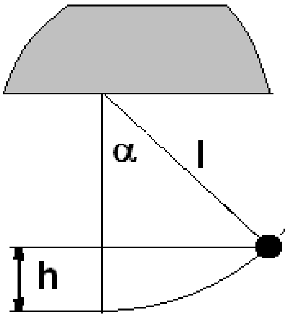
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{mR^2 + J}{R^2} \ddot{s}$$

Po dosazení těchto veličin do Eulerovy-Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ *získáme výsledné rovnice:*

$$\frac{mR^2 + J}{R^2} \ddot{s} - mg \sin\alpha = 0$$

$$\ddot{s} = \frac{mR^2}{mR^2 + J} g \sin\alpha \qquad \text{(C1.7.3)}$$

8 S použitím Lagrangeovy a Hamiltonovy teorie odvoďte pohybové rovnice matematického kyvadla.



a) Řešení s použitím Lagrangeovy teorie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\alpha})^2 \qquad U = mgh = mgl(1-\cos\alpha)$$

kde lα = s je dráha. Dosazením do Lagrangeovy funkce L = T – U dostáváme:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - mgl(1-\cos\alpha)$$

Po dosazení do Eulerovy-Lagrangeovy rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ *pak již přímo získáváme příslušnou pohybovou rovnici:*

$$ml^2\ddot{\alpha} + mgl\sin\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0 \qquad \text{(C1.8.1)}$$

b) Řešení s použitím Hamiltonovy teorie:

Zobecněná hybnost, dle rov. $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q,\dot{q},t);\quad i = 1,\dots, f$ *, je* $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = ml^2\dot{\alpha}$ *a může být využita k vyjádření kinetické energie:* $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{2}\frac{p_\alpha^{\,2}}{ml^2}$. *Protože celková energie systému nezávisí na čase, můžeme Hamiltonián* $H(q_i, p_i, t) = \sum_{j=1}^{f} p_j\dot{q}_j - L(q_i,\dot{q}_i,t)\Big|_{\dot{q}_i \to p_i}$ *vyjádřit jako celkovou energii systému:*

$$H = T + U = \frac{1}{2}\frac{p_\alpha^{\,2}}{ml^2} + mgl(1-\cos\alpha)$$

Další krok spočívá ve formulaci Hamiltonových kanonických rovnic pro zobecněnou souřadnici α:

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -mgl\sin\alpha, \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{p_\alpha}{ml^2} \qquad \text{(C1.8.2)}$$

Porovnáním derivace druhé z kanonických rovnic s prvou z nich obdržíme pohybovou rovnici:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0 \qquad \text{(C1.8.3)}$$

Rovnice (C1.8.3) a (C1.8.1) získané alternativními způsoby jsou shodné.

Literatura ke kapitole 1

Brdička, M., Hladík, A.: Teoretická mechanika. Academia, Praha 1987, 581 s.

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika. Část 1. Mechanika. VUTIUM/PROMETHEUS, Praha 2000, s. 1-328.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s.

Kvasnica, J.: Termodynamika. SNTL, Praha 1965, 394 s.

Kvasnica, J.: Statistická fyzika. SNTL, Praha1983, 314 s.

Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.

Landau, L., Lifšic, E.: Mechanika. Izdatelstvo „Nauka“, Moskva 1965, 204 s.