Cvičení 11

1. Vypočtěte impedanci koaxiálního kabelu s poloměry r_1 = 1 mm a r_2 = 4 mm s vloženým dielektrikem o relativní permitivitě 16. $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

   Řešení:

   Z vlnové rovnice vyplývá, že rychlost šíření signálu v přenosových vedeních je $v = \dfrac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$, kde L_0 resp. C_0 je měrná vlastní indukce resp. kapacita přenosového vedení. Charakteristická impedance přenosového vedení potom je: $Z_0 = vL_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} L_0 = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$. V případě koaxiálního kabelu platí:

   $L_0 = \dfrac{\mu}{2\pi} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$ a $C_0 = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}$, kde μ je permeabilita a ε permitivita vloženého dielektrika a r_2 a r_1 jeho vnější a vnitřní poloměr. Po dosazení L_0 a C_0 do vztahu pro Z_0 platí: $Z_0 = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$. V případě praktického výpočtu se pro diamagnetika a paramagnetika používá relativní permeabilita o hodnotě 1. Po dosazení je pak Z_0 = 21 Ω.

2. Vypočtěte napěťový a proudový koeficient odrazu pro koaxiální kabel z příkladu 1 na přechodu v koaxiální kabel stejných rozměrů, ale s dielektrikem o relativní permitivitě 4.

   Řešení:

   Pokud je přenosové vedení s charakteristickou impedancí Z_0 ukončeno impedancí Z_L, dochází k odrazu vlny. Zavádíme napěťový koeficient odrazu $R_U = \dfrac{U_-}{U_+} = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

   a proudový koeficient odrazu $R_I = \dfrac{I_-}{I_+} = \dfrac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$, tj. $R_U = -R_I$. Impedanci Z_L vypočítáme ze vztahu

   $Z_L = \sqrt{\dfrac{L_L}{C_L}}$ (viz př. 1), kde ε_r = 4. Pak Z_L = 2 Z_0, $R_U = \dfrac{1}{3}$ a $R_I = -\dfrac{1}{3}$.

3. Vypočtěte mezní frekvenci přenosového vedení s vlastní indukčností 6.10^{-8} H a vlastní kapacitou 1 nF.

   Řešení:

   Pokud impedance přenosového vedení mají neohmický charakter (jsou to komplexní čísla), potom lze toto vedení použít jako frekvenční filtr. Nízkofrekvenční filtr propouští pouze signály pod mezní úhlovou frekvencí $\omega_{\mathrm{CNF}} = \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$. Vysokofrekvenční filtr propouští pouze signály nad mezní úhlovou frekvencí $\omega_{\mathrm{CVF}} = \dfrac{1}{2\sqrt{LC}}$. Po dosazení zadaných hodnot je ω_{CNF} = 258 rad/s a ω_{CVF} = 65 rad/s.

4. Odhadněte koeficient odrazu a podíl intenzity odražených elektromagnetických vln na rovinném rozhraní dvou nevodivých optických prostředí. Numericky aplikujte na průchod viditelného světla rozhraním vzduch-sklo.

   Řešení:

   Vyjdeme ze vztahu mezi amplitudovým koeficientem odrazu a indexy lomu:

   $n = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{1-R}{1+R}$, který po úpravách přejde ve výraz $R = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$. Poměr intenzity odraženého světla a intenzity dopadajícího světla dostaneme jako druhou mocninu amplitudového koeficientu odrazu $I_r = \frac{E_r^2}{E_i^2} = R^2$.

Pro uvedené rozhraní: $n_1 = 1$, $n_2 \approx 1{,}5$: $R = -0{,}2$, $I_r = 0{,}04$. Znaménko minus u R znamená, že při odrazu dochází ke změně znaménka elektrického pole.

5. Odvoďte rovnici odražené vlny od destičky o jisté stálé tloušťce L.
<u>Řešení:</u>
Použijeme rovnici $E_x = E_0 e^{i\omega t} e^{\pm\gamma z}$, kde $\gamma^2 = i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$ s vodivostí $\sigma = 0$ a pro dopadající vlnu intenzity elektrického pole získáváme: $E_{ix} = E_0 e^{i(\omega t - \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}z)}$, pro vlnu odraženou od povrchu destičky $E_{r1x} = R_{12} e^{i(\omega t + \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}z)}$ a pro vlnu odraženou (v prostředí 2. destičky) od opačné strany destičky (prostředí 3). Vlna odražená na obou površích destičky bude superpozicí obou odražených vln: $E_{rx} = E_{r1x} + E_{r2x}$. Pro transmisní koeficienty T_{12} a T_{21} přibližně platí: $T_{12}.T_{21} = (1 + R_{12}).(1 - R_{21}) = 1 - R_{12}^2 \approx 1$. V tomto přiblížení nalezneme konečný vztah pro výslednou odraženou vlnu:
$$E_{rx} = E_0\left[R_{12} e^{i(\omega t + \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}z)} + R_{23} e^{i(\omega t + \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}z - 2\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}L)}\right]$$

6. Na základě výsledků předchozího cvičení určete podmínky, za nichž nedochází k odrazu světla na destičce.
<u>Řešení:</u>
Jedno z možných řešení spočívá v případu, kdy obě superponované vlny mají stejnou amplitudu, tj. $R_{12} = R_{23}$ a vlny jsou vůči sobě posunuty o π, tj. $2L = \lambda_2/2$. Z prvé podmínky a $R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ plyne: $Z_1/Z_2 = Z_2/Z_3$ či $Z_2 = (Z_1 Z_3)^{1/2}$. Z druhé podmínky plyne, že $L = \lambda/4 \pm \lambda/2 = \lambda/2.(1/2 \pm 1)$. Naopak největší odraz nastává, když tloušťka destičky je rovna celistvému násobku $\lambda/2$.

<u>Literatura ke kapitolám 10 a 11</u>

Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3. McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.
Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.
Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.
Skudrzyk, E.: Simple and Complex Vibrating Systems. The Pennsylvania State University Press, University Park 1969, 500 s.