Cvičení 3

1. Hmotný bod kmitá harmonicky. Pro jeho výchylku platí:

$$\{y\} = 0{,}3\sin\left[\frac{1}{4}\pi\{t\} + \frac{1}{3}\pi\right]$$

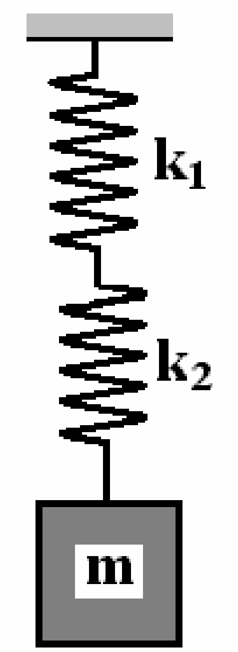
Určete amplitudu výchylky, periodu a počáteční fázi kmitavého pohybu.

Řešení:
Porovnáme zadanou rovnost s rovnicí pro výchylku harmonického kmitavého pohybu:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

a dostaneme: A = 0,3 m, $\omega = \pi/4$ rad.s^{-1}, $\varphi = \pi/3$ rad.
Periodu T vypočteme ze známého vztahu (3.7b): $T = 2\pi/\omega = 8$ s.

2. Hmotný bod kmitá harmonicky a za 1 minutu vykoná 180 kmitů s amplitudou 1 cm. Počáteční fáze kmitání je 60^{o}. Napište rovnici harmonických kmitů a určete nejmenší dobu t před počátečním okamžikem (t = 0), ve kterém byla fáze nulová.



Obr. 3.4 Mechanický oscilátor s dvěma pružinami

Řešení:
Hmotný bod kmitá s frekvencí f = 180/60 s^{-1} = 3 Hz. Příslušná úhlová frekvence:
$\omega = 2\pi f = 2\pi.3$ s^{-1} = 6π s^{-1}. Dosazením do rovnice harmonických kmitů (3.5c) $x(t) = A.\sin(\omega t + \varphi)$ dostaneme: $\{x(t)\} = 0{,}01\sin[6\pi\{t\} + \pi/3]$. Podmínka pro nulovou hodnotu fáze kmitání má tvar: $\omega t + \varphi = 0$, tj.

$$6\pi t + \pi/3 = 0 \quad \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3{,}6\pi}s = -\frac{1}{18}s$$

Harmonické kmity mají nulovou fázi 1/18 s před počátečním okamžikem.

3. Hmotný bod koná harmonický hmotný bod s amplitudou výchylky 10 cm a dobou kmitu 1 s. Určete: a/ výchylku, rychlost a zrychlení hmotného bodu v čase 1/8 s od začátku pohybu, b/ dobu pohybu hmotného bodu z polohy rovnovážné do krajní, c/ dobu za jakou urazí hmotný první polovinu této dráhy, d/ dobu za jakou hmotný bod urazí druhou polovinu uvažované dráhy. Počáteční fáze kmitavého pohybu je rovna nule.

Řešení:
Vyjádříme nejprve zadání v obvyklé symbolice: T = 1 s, φ = 0, A = 0,1 m.

Ad a/ Rovnice pro okamžitou výchylku má tvar (3.5c): $x(t) = A.\sin(\omega t)$ = A.sin($2\pi t/T$), číselně to znamená: x(0,125 s) = 0,1.sin($2\pi/8$) m = 0,1 sin($\pi/4$) m = $0{,}1/\sqrt{2}$ m.
Okamžitá rychlost harmonického kmitavého pohybu je dána vztahem:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \omega A\cos\omega t = \frac{2\pi}{T}A\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

číselně po dosazení do předchozího vztahu: v(0,125 s) = 2π.0,1.cos($2\pi/8$) m.s^{-1} = = $\pi\sqrt{2}$ m.s^{-1}.
Okamžité zrychlení harmonického kmitavého pohybu je dáno vztahem:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\sin\omega t = -\omega^2 x(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x(t)$$

opět číselně: $a(0{,}125s) = -(2\pi)^2\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}ms^{-2} = -4\pi^2 0{,}1\frac{\sqrt{2}}{2}ms^{-2} = -0{,}2\sqrt{2}\pi^2 ms^{-2}$

Záporné znaménko znamená, že vektor zrychlení má opačný směr než vektor výchylky.

Ad b/ Dobu, za kterou hmotný bod přejde z polohy rovnovážné do krajní, označme t_a, pak platí: $x(t_a) = A\sin(\omega t_a)$, $x(t_a) = A \Rightarrow \sin(\omega t_a) = 1 \Rightarrow \omega t_a = \pi/2 \Rightarrow t_a = \pi/(2\omega) = \pi T/(2.2\pi) = T/4 = 0{,}25$ s. Hmotný bod přejde z polohy rovnovážné do polohy krajní za 0,25 s.

<u>Ad c/</u> dobu, za kterou hmotný bod pojde první polovinu dráhy z polohy rovnoběžné do krajní, označíme t_1, pak platí:

$x(t_1) = A \sin \omega t_1 = A/2 \;\Rightarrow \sin \omega t_1 = 1/2 \;\Rightarrow \omega t_1 = \pi/6 \Rightarrow t_1 = \pi/6[T/(2\pi)] = 1/12$ s.

Hmotný bod vykoná první polovinu dráhy z rovnoběžné polohy do polohy krajní za 1/12 s.

<u>Ad d</u>/ Dobu, za kterou projde hmotný bod druhou polovinu dráhy z polohy rovnovážné do polohy krajní, označíme t_2, pak platí:

$t_2 = t_a - t_1 =$ (1/4 – 1/12) s = 1/6 s

Hmotný bod vykoná druhou polovinu dráhy z polohy rovnovážné do polohy krajní za 1/6 s.

4. Na obrázku 3.4 je mechanický oscilátor tvořený pružinami o tuhostech k_1, k_2 a hmotnosti m. Určete periodu kmitů oscilátoru. Hmotnost pružin a vliv tření zanedbejte.

<u>Řešení</u>:
Vychýlíme-li oscilátor na obr. 3.4 z rovnovážné polohy, budou obě pružiny napínány, resp. stlačovány stejně a na těleso působí

$$F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2$$

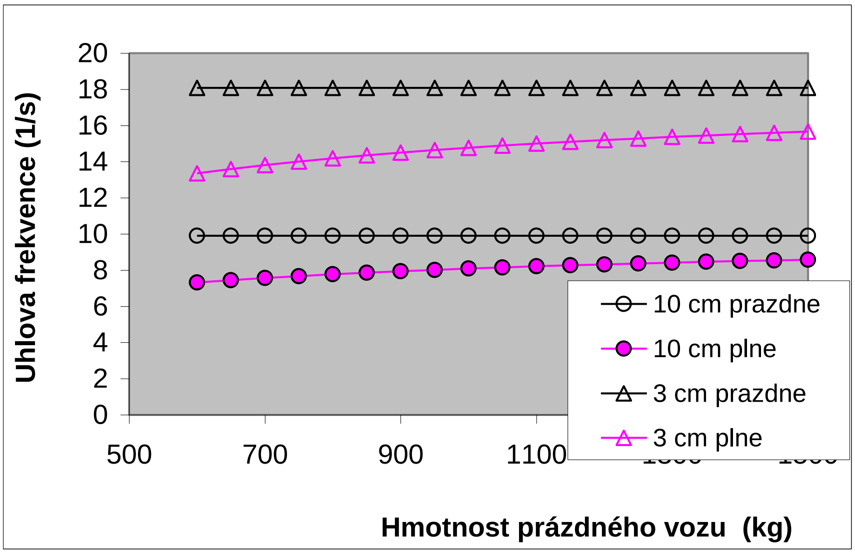
Prodloužení x_1 a x_2 pružin jsou různá, ale platí, že

$$x = x_1 + x_2 = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = -F\,\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$$

Dosadíme-li do vztahu pro periodu vlastních kmitů oscilátoru (např. rov. (3.7b)) za efektivní konstantu dvojice pružin k_1 a k_2: $k = (k_1 k_2)/(k_1 + k_2)$, dostaneme:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}\ .$$

5. Odhadněte frekvenci vlastních kmitů pérování automobilu – viz obrázek. Zadána je hmotnost prázdného automobilu, stlačení pér za klidu a zatížení automobilu osádkou a zavazadly (vždy 500 kg). Odhadněte energii těchto kmitů.



Řešení:

$$K = mg / x;$$

$$\omega_0 = \sqrt{K / m} = \sqrt{g / x}$$

$$\omega = \sqrt{mg /[x(m + m_z)} =$$

$$\sqrt{g /[x(1 + m_z / m)]}$$

$$\omega = \omega_0 / \sqrt{1 + m_z / m}$$

Literatura ke kapitole 3

Brdička, M., Hladík, A.: Teoretická mechanika. Academia, Praha 1987, 581 s.
Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.
Halliday, D.,Resnick, R., Walker, J.: Fyzika. Část 1. Mechanika. VUTIUM/PROMETHEUS, Praha 2000, s. 1-328.
Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.
Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.
Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.