Cvičení 4

1 Odvoďte vztah pro poměr mezi *m*-tou a *n*-tou maximální výchylkou oscilátoru (*m* je větší než *n*).

Řešení:

Pro poměr dvou po sobě následujících tlumených harmonických kmitů platí:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{Ae^{-\delta(t_1+T)}\sin[\omega(t_1+T)+\varphi]}{Ae^{-\delta t_1}\sin[\omega t_1+\varphi]} = e^{-\delta T}.$$

Analogicky platí: $\frac{x_3}{x_1} = \frac{Ae^{-\delta(t_1+2T)}\sin[\omega(t_1+2T)+\varphi]}{Ae^{-\delta t_1}\sin[\omega t_1+\varphi]} = e^{-2\delta T}$.

a stejně tak např.: $\frac{x_4}{x_1} = \frac{Ae^{-\delta(t_1+3T)}\sin[\omega(t_1+3T)+\varphi]}{Ae^{-\delta t_1}\sin[\omega t_1+\varphi]} = e^{-3\delta T}$.

Z výše uvedeného plyne, že v exponentu útlumu je vždy rozdíl indexů výchylek.

Obecně tedy platí: $\frac{x_m}{x_n} = e^{-(m-n)\delta T}$.

2 Vypočtěte relativní výchylku tlumeného oscilátoru s dekrementem útlumu $\delta = 2\omega$ a srovnejte se stejnou závislostí vypočtenou pro oscilátor s kritickým útlumem ($\delta = \omega$).

Řešení:

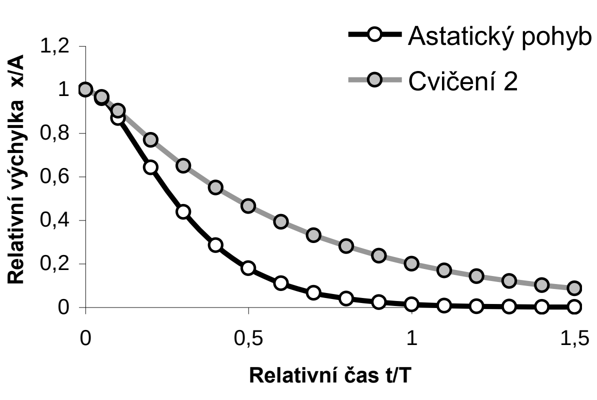
K rovnici $x(t) = C_1e^{(-\delta+D)t} + C_2e^{(-\delta-D)t} = e^{-\delta t}\left(C_1e^{Dt} + C_2e^{-Dt}\right)$ volme stejné počáteční podmínky jako u rovnice $x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2t)$, tj. $x(0) = A$ a $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0$. Tím získáme pro integrační konstanty následující vztahy:

$$\frac{C_1}{A} = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2D}, \quad \frac{C_2}{A} = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2D} \qquad \text{(C4.2.1)}$$

a po dosazení hodnot pro D a δ pak vztah pro relativní výchylku:

$$\frac{x(t)}{A} = e^{-4\pi\tau}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)e^{2\sqrt{3}\pi\tau} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)e^{-2\sqrt{3}\pi\tau}\right] \qquad \text{(C4.2.2)}$$

kde $\tau = \frac{t}{T}$ je relativní čas. Vypočtený průběh je uveden spolu s grafem astatického pohybu v obr. 4.2. Obrázek ukazuje, že relativní výchylka případu tlumeného kmitavého pohybu s dekrementem $\delta = 2\omega$ klesá s rostoucím časem výrazně pomaleji než u oscilátoru s kritickým útlumem.



Obr. 4.2 Srovnání relativních výchylek dle rov. (C4.2.2) s průběhem pro kritický útlum (obr. 4.1)

3 Vypočtěte relativní výchylku tlumeného oscilátoru pro případ s dekrementem útlumu $\delta = n\omega$ kde n je číslo větší než 1. Výsledek porovnejte s relativní výchylkou u oscilátoru s kritickým útlumem.

Řešení:
Vyjádříme všechny dílčí veličiny z rovnice (C4.2.1.) a rovnice
$x(t) = C_1 e^{(-\delta+D)t} + C_2 e^{(-\delta-D)t} = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{Dt} + C_2 e^{-Dt}\right)$ prostřednictvím periody kmitání T.

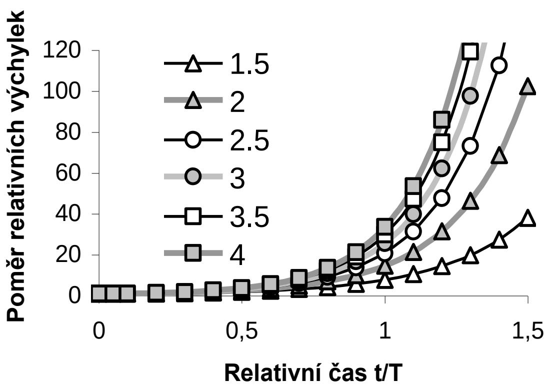
Obdržíme následující výrazy:

$$\delta = n\omega = 2\pi n / T, \quad D = \omega\sqrt{n^2-1} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{n^2-1}, \quad \frac{\delta}{D} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \qquad \text{(C4.3.1)}$$

Dosazením do rov. $x(t) = C_1 e^{(-\delta+D)t} + C_2 e^{(-\delta-D)t} = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{Dt} + C_2 e^{-Dt}\right)$ obdržíme pro relativní výchylku následující vztah:

$$\frac{x(t)}{A} = e^{-\delta t}\left(\frac{C_1}{A}e^{Dt} + \frac{C_2}{A}e^{-Dt}\right) = \frac{1}{2}e^{-2\pi n\frac{t}{T}}\left[\left(1+\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)e^{2\pi\sqrt{n^2-1}\frac{t}{T}} + \left(1-\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)e^{-2\pi\sqrt{n^2-1}\frac{t}{T}}\right]$$
(C4.3.2)

Abychom porovnali výsledek s relativní výchylkou u kritického útlumu podělíme rov. (C4.3.2) příslušnými hodnotami pro kritický útlum (astatický pohyb). Získaný poměr výchylek je uveden v obr. 4.3. Poměr relativních výchylek roste s rostoucím časem a rostoucí hodnotou n. Nárůst poměru výchylek je vysoký pro relativní čas větší než 2/3 periody a n menší než 3. Tento poznatek ukazuje na fakt, že i malé odchylky od podmínky $\delta = \omega$ na stranu vyšších tlumení vedou k významnému růstu odchylek od vztahu odvozeného pro kritický útlum (astatický pohyb, rov. $x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t)$).



Obr. 4.3 Poměr relativních výchylek u tlumení s $\delta = n\omega$ (hodnoty n v legendě) a u kritického útlumu

4 Pro pokročilejšího čtenáře:
Prostudujte práci Torzo, G., Peranzoni, P., 2009: The real pendulum: theory, simulation, experiment. Lat. Am. J. Phys. Educ. 3, 221-228. (http://www.journal.lapen.org.mx/May09/LAJPE%20241%20preprint%20f.pdf) a sestavte pohybovou rovnici kyvadla s velkou amplitudou kyvů při působení tlumení. Numericky řešte získanou rovnici a diskutujte anharmonické efekty v souvislosti s tlumením.

Literatura ke kapitole 4

Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.
Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.
Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.
Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.