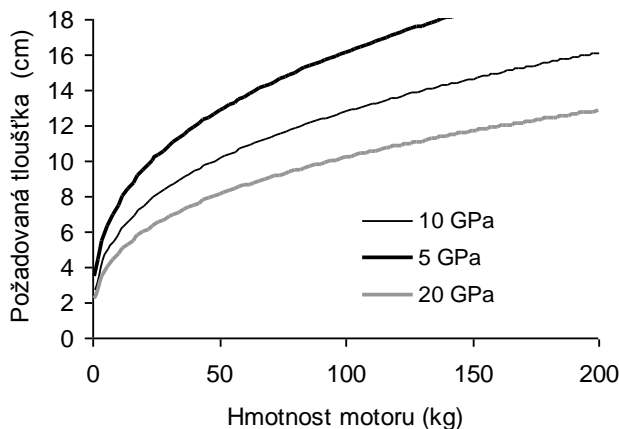


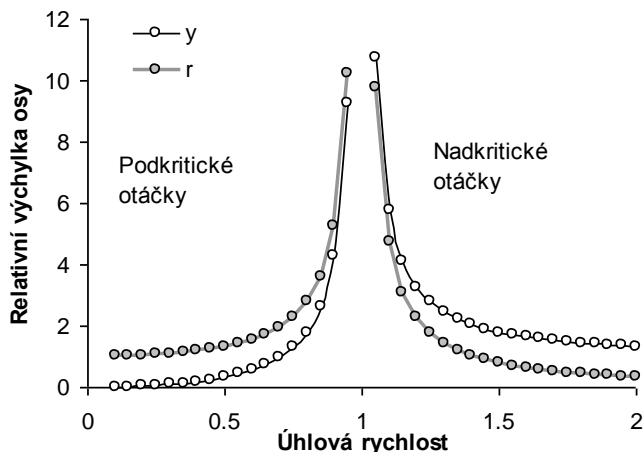
Cvičení 5

1. Mějme elektromotor o hmotnosti $m = 50$ kg, který je umístěn ve středu dřevěného nosníku délky $l = 2$ m a šířky $a = 15$ cm. Jaká musí být tloušťka nosníku aby rezonance nenastala při otáčkách větších než 20 Hz? Zobecněte příklad na libovolnou hmotnost elektromotoru a získanou závislost zobrazte do grafu.



Obr. 5.6. Vypočtená tloušťka nosníku pro uchycení elektromotoru pro různé moduly pružnosti dřeva (5 – 20 GPa) v závislosti na hmotnosti elektromotoru

dřeva (5 – 20 GPa) jsou vyneseny v závislosti na hmotnosti elektromotoru v obr. 5.6. Obrázek ukazuje růst tloušťky nosníku s rostoucí hmotností elektromotoru a klesajícím modulem pružnosti. Pro hmotnost elektromotoru 50 kg byly spočteny následující hodnoty tloušťek: 8,07 cm (modul pružnosti 20 GPa), 10,2 cm (modul pružnosti 10 GPa), a 12,8 cm (modul pružnosti 5 GPa).



Obr. 5.7 Závislost relativní výchylky osy rotujícího nevycentrovaného talíře na úhlové rychlosti (viz text)

Řešení:

Průhyb nosníku x na dvou podporách zatížený uprostřed osamělou silou F se vypočte ze vztahu:

$$x = \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{Fl^3}{4Eah^3} = \frac{mgl^3}{4Eah^3} \quad (\text{C5.1.1})$$

(viz např. lab. úloha IIIb – Modul pružnosti z ohybu tyče), kde E je modul pružnosti nosníku a h jeho tloušťka.

S použitím vztahu $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x}}$ (frekvence

vlastních kmitů upínacího zařízení) pak získáme pro tloušťku nosníku výraz:

$$h = l^3 \sqrt{\frac{\pi^2 f^2 m}{Ea}} \quad (\text{C5.1.2})$$

Výsledky výpočtů pro různé moduly pružnosti

2. Mějme hřídel na které je kolmo umístěn talíř o hmotnosti m a jehož těžiště je vůči ose hřídele posunuto v radiálním směru o vzdálenost e . Odhadněte celkový průhyb hřídele r při rotaci hřídele (spojenou s uvedeným diskem) s úhlovou frekvencí Ω .

Řešení:

Těžiště disku bude rotovat kolem pomyslné neprohnuté osy po kružnici o poloměru $r = e + y$, kde y je reálný průhyb hřídele. Rotující hřídel bude tedy zatížena dodatečnou radiální dynamickou silou F_r kompenzovanou direkční silou F_d přenášenou do reakcí v uložení hřídele. V zásadě tedy musí platit následující vztahy:

$$|F_r| = ma_n = m\Omega^2(e + y) = |F_d| = Ky \quad (\text{C5.2.1})$$

kde a_n je normálové zrychlení těžiště a K je konstanta vyjadřující vztah mezi pružným průhybem hřídele a tímto způsobem vzniklou příčnou ohybovou silou působící na hřídel. Konstantu K můžeme odhadnout z vlastní frekvence rotující osy s diskem s použitím vztahu $K = m\omega^2$. Po dosazení do vztahu (C5.2.1) a jednoduchých úpravách obdržíme:

$$\frac{y}{e} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 - 1} = \frac{\Omega_R^2}{1 - \Omega_R^2}$$

$$\frac{r}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2}{\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 - 1} = \frac{1}{1 - \Omega_R^2}$$
(C5.2.2)

V nadkritických otáčkách ($\Omega_R > 0$) dávají oba výrazy (C5.2.2) záporné hodnoty. Souvisí to s fázovým posuvem buzených kmitů oproti budící síle, viz rov. (5.7b) a obr. 5.2, který reprezentuje při slabém tlumení cca půl periody, tj. pro úhlovou frekvenci posuv π . V našem případě budeme řešit tento problém záměnou znamének ve vztazích (C5.2.2) pro $\Omega_R > 0$. Výsledkem výpočtů podle takto modifikovaných vztahů jsou závislosti relativních amplitud kmitů osy talíře na frekvenci jeho otáček uvedené v obr. 5.6. Obrázek ukazuje jak enormní nárůst výchylek osy při otáčkách rovných vlastní frekvenci jejích kmitů, tak pokles těchto výchylek v oblasti nadkritických otáček, kde poloměr otáček těžiště se dokonce asymptoticky blíží nule. Podle dosažených výsledků se dá očekávat v oblasti nadkritických otáček klidný režim otáčení v jistém smyslu klidnější než v oblasti otáček podkritických.

Literatura ke kapitole 5

- Brepta, R., Prokopec, M.: Šíření napět'ových vln a rázy v tělesech. Academia, Praha 1972. 521 s.
 Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha 1994, 589 s.
 Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.
 Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fyzika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.
 Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.
 Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.