

Fyzikální systém

- Je část fyzikálního vesmíru
- Okolí systému – ta část přírody, která do daného systému nepatří
- Chování systému je dáno jeho fyzikálním stavem
- Stav systému popisují stavové proměnné a stavové funkce
- Stav systému mění děj resp. posloupnost dějů (proces)
- Parametry systému:
 - vnější - popisují působení okolí na systém
 - vnitřní - charakterizují pouze daný systém
- Reálné systémy jsou zjednodušovány do modelových systémů:
 - hmotný bod, ideální plyn, ideální kapalina, atd.

Klasická mechanika časoprostoru

Významnou změnou fyzikálního systému je změna časoprostorové konfigurace – pohyb – tím se zabývá mechanika

Klasická Newtonova mechanika – vybudována na představě o silovém působení mezi hmotnými body resp. tělesy (prostřednictvím silových polí)

- je formulována pomocí vektorů

Polohový vektor v kartézské soustavě souřadné určuje okamžitou polohu hmotného bodu:

$$\vec{r}_i = x_{1i}\vec{e}_1 + x_{2i}\vec{e}_2 + x_{3i}\vec{e}_3 \equiv x_{ki}\vec{e}_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

Kartézská base

Násobení vektoru skalárem

$$\begin{array}{ll} \vec{b} = c \vec{a} & 1 \text{ } c \text{ větší než } 0 \\ |\vec{b}| = c |\vec{a}| & 2 \text{ } c \text{ rovno } 0 \\ & 3 \text{ } c \text{ menší než } 0 \end{array}$$

Kolinearita vektorů $\vec{a}$ $\vec{b}$

$$\vec{b} = c \vec{a}$$

Koplanarita vektorů $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

$$\vec{c} = d_1 \vec{a} + d_2 \vec{b}$$

Rovnájí-li se sobě dva vektory,
rovnají se sobě i stejnojmenné
složky

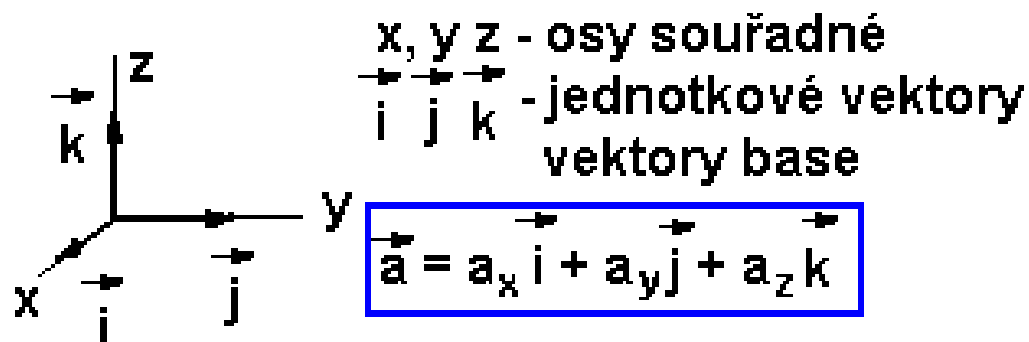
Base

Jakýkoliv vektor je lineární
kombinací vektorů base

rovina: dva nekolineární vektory

prostor: tři nekoplanární vektory

Kartézská soustava souřadná



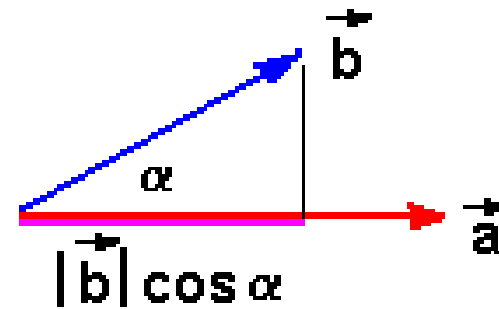
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad a_x \ a_y \ a_z \text{ složky}$$

Skalární součin vektorů

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

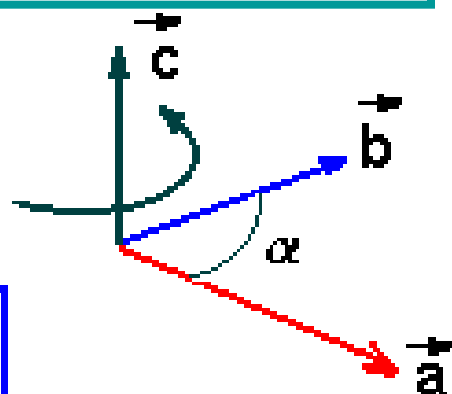
směrové kosiny

- úhly mezi vektorem a příslušnými osami souřadnými

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

Vektorový součin

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{c}|$$



$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{i} &= 0 \end{aligned}$$

1. velikost: $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$
2. směr je kolmý na $\vec{a}$ i $\vec{b}$
3. tvoří pravotočivou soustavu s vektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$
4. nulový vektor, jsou-li $\vec{a}$ a $\vec{b}$ kolineární
5. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \vec{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \vec{k}$$

Soustava N částic $S(N)$

- soustavu N hmotných bodů označujeme symbolem $S(N)$,
- místo pojmu hmotný bod budeme používat pojem částice

volná soustava – pohyb částic není omezen – lze popsat Newton. ricemi:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i (i = 1, \dots, N)$$

- **platí v inerciální soustavě** – tj. tam, kde platí 1. NZ

na soustavu $S(N)$ zpravidla působí vazby (omezení) vyjádřené rovnicí či nerovnicí

- vazby dvoustranné (udržující),
- vazby jednostranné (neudržující)
- rovnice $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n; t) = 0$ charakterizuje

holonomní (integrabilní) vazbu - v rovnicích pouze čas a souřadnice

- může být vyjádřena také diferenciální rovnicí

Soustava N částic $S(N)$

Neholonomní vazby (v nich i další složky – např. rychlost)

reonomní (nestacionární) – ve vazbové podmínce vystupuje explicitně čas

skleronomní (stacionární) opak reonomní podmínky

geometrické - ve vazbové podmínce pouze souřadnice, speciální případ
skleronomních podmínek

kinematické – ve vazbových podmínkách vystupují také rychlosti

Úvod do zobecněných souřadnic pro vázané částice

- soustava částic $S(N)$ omezena s holonomními vazbovými podmínkami:

$$\varphi_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = 0; (j = 1, \dots, s)$$

Počet stupňů volnosti soustavy je $f = 3N - s$

- eliminace s závislých souřadnic:

Transformací původních $3N$ souřadnic na f nových nezávislých zobecněných souřadnic: $q_1, q_2, \dots, q_f$

- původní souřadnice jsou:

$$x_{ki} = x_{ki}(q_1, \dots, q_f; t); \quad k = 1, 2, 3, \quad i = 1, \dots, N$$

- nové zobecněné souřadnice definují bod v f -rozměrném prostoru

Jednoduchý příklad

Jedna částice, jejíž pohyb je vázán na kružnici:

místo dvou kartézských souřadnic x_1 a x_2 splňující holonomní resp. skleronomní (geometrickou) vazbovou rovnici:

$$|\vec{r}|^2 = r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

stačí použít jednu zobecněnou souřadnici φ , pomocí níž vyjádříme obě kartézské souřadnice:

$$x_1 = |\vec{r}| \cos \varphi$$

$$x_2 = |\vec{r}| \sin \varphi$$

Newtonovy pohybové zákony

I. Zákon setrvačnosti Volné hmotné body v inerciální soustavě, je to spíše podmínka: „ Hmotný bod zůstává“, ustavuje inerciální soustavy

II. Zákon síly $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$

fundamentální zákon klasické mechaniky

III. Akce a reakce Symetrie působících sil, základ dynamické rovnováhy

- použití NZ pro vázané soustavy vede k problémům:

1. Pohybové rovnice nezahrnují vazby
2. Vazbové síly jsou neznámé

- proto je Newt. mechanika vhodná ke studiu volných a nikoliv vázaných soustav
- pro vázané soustavy je třeba použít variační principy z analytické mechaniky

Úvod do analytické mechaniky

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = L(q_i(t), t) = T - U$$

Lagrangeova funkce

T – kinetická energie

U – potenciální energie

nekonzervativní systémy - potenciální energie v zobecněném smyslu, veličiny T a U můžeme je vyjádřit v libovolných souřadnicích, k určení pohybu systému nemusíme zavádět ani pojem síly a dokonce ani vazbové podmínky!

Úvod do analytické mechaniky

Hamiltonovy kanonické rovnice

Převod Eulerových-Lagrangeových rovnic na kanonický (Hamiltonův) tvar

(z dif. rovnic 2. řádu na dif. rovnice 1. řádu):

- zavedení zobecněných hybností

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t); \quad i = 1, \dots, f$$

- přechod od proměnných $(q_i, \dot{q}_i)$ k proměnným (q_i, p_i) :

- kde:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j - L(q_i, \dot{q}_i, t) \Big|_{\dot{q}_i \rightarrow p_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Funkce $H(q_i, p_i, t)$ se nazývá Hamiltonova funkce (Hamiltonián)

- má rozměr energie,
- pokud L nezávisí explicitně na čase, tj. platí-li $\partial L / \partial t = 0$, H se nemění,
- ve většině případů je H totožné s celkovou energií systému: $H = T + U$

Cvičení

1. Diskutujte stavové parametry, které můžeme přiřadit fyzikálnímu systému, tvořeným hmotným bodem.
2. Diskutujte stavové parametry, které můžeme obecně přiřadit termodynamickému systému.
3. Diskutujte stavové parametry fyzikálního systému, tvořeného planetou Země, popř. Sluneční soustavou.
4. Diskutujte zvláštnosti fyzikální soustavou tvořenou celým vesmírem.
5. Prostřednictvím polohového vektoru popište body, které leží na kruhové trajektorii o poloměru 4 v rovině dané vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ a její střed je dán polohovým vektorem $\mathbf{r}_0$.
6. Těleso o hmotnosti m_1 a těleso o hmotnosti m_2 jsou spojeny nehmotným, neprodužujícím se vláknem délky l , vedeným přes nehmotnou kladku o poloměru R , která se volně otáčí bez tření (viz. obr. 1) Takovéto uspořádání se nazývá Atwoodův padostroj. Určete pohyb obou těles.