

Volný kmitavý pohyb

- Kmitavý pohyb – jakýkoliv opakující se děj systému, při kterém systém nepřekročí konečnou odchylku od příslušné stabilní rovnovážné polohy
- Příčinou kmitavého pohybu je vratná konzervativní síla, která závisí na velikosti výchylky systému z rovnovážné polohy a směřuje proti této výchylce (působí tak, aby se systém do rovnovážné polohy vrátil)
- Pokud je vratná síla přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy, jedná se o **lineární vratnou sílu**
- Kmity způsobené touto silou jsou harmonické
- Lineární harmonický oscilátor – původce harmonických kmitů
- Kmitající systém i vznikající síly mohou být velmi rozmanité povahy: elastické síly u pružiny, tíhová síla u kyvadla, indukované elektromotorické napětí v elektrickém LC obvodu apod.

Lineární harmonický oscilátor

Všechny harmonické kmity jsou popsány rovnicí:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$$
$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$$

- obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou – homogenní lineární rovnice 2. řádu

kde $u(t)$ představuje okamžitou výchylku systému z rovnovážného stavu a „dvojtečka“ nad tímto symbolem označuje jeho druhou derivaci podle času a ω je vlastní úhlová frekvence oscilátoru

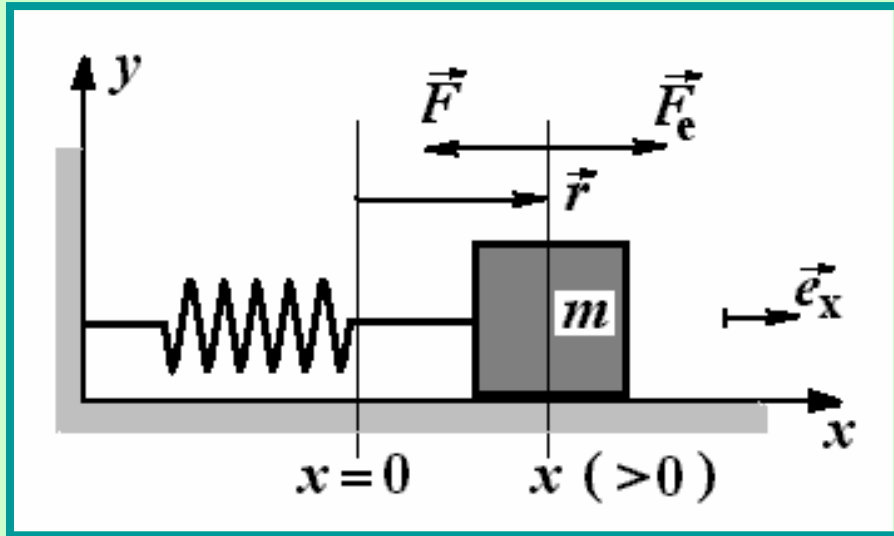
Vlastní úhlová frekvence ω určuje „kinematiku“ výchylek z rovnovážného systému, prakticky to znamená, že proces je periodický a ω je jeho úhlová frekvence, definujeme tedy další konstantní veličiny:

$$\text{frekvenci } f = \omega/(2\pi)$$

$$\text{periodu } T = 1/f = 2\pi/\omega$$

Harmonické kmity mechanické (na pružině)

- jednorozměrné (kmitání v jedné přímce)



- při vychýlení systému z rovnovážné polohy začne působit **lineární vratná síla**

$$F(t) = -kx(t)$$

$$[k] = \frac{N}{m}$$

k - silová konstanta (tuhost pružiny)

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Speciální (jednorozměrná) pohybová rovnice pro lineární harmonický oscilátor



$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dynamické znázornění

- rozměrová zkouška

Přesné řešení pohybové rovnice

$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ - obyčejná homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ - předp. řešení ve tvaru $x(t) = e^{\lambda t}$
- charakteristická rovnice s řešením $\lambda = \pm i\omega$ – rozepsat

$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ - obecné řešení diferenciální pohybové rovnice

kde integrační konstanty C_1 a C_2 musí být obecně komplexní a platí $C_2 = \overline{C_1}$

- rozepsat:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

$$A_1 = C_1 + C_2 = A \sin \varphi$$

$$A_2 = i(C_1 - C_2) = A \cos \varphi$$

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Obecná rovnice lineárního harmonického pohybu

Konstanty A_1 a A_2 chápeme jako složky výsledného pohybu, přičemž složka reprezentovaná konstantou A_1 představuje pohyb, u něhož výchylka nabývá hodnotu A_1 pro čas rovný nule a složka reprezentovaná konstantou A_2 představuje pohyb posunutý vůči předchozímu pohybu o $\pi/2$; platí tedy:

Alternativní vyjádření pro řešení

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$



$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Periodicita:

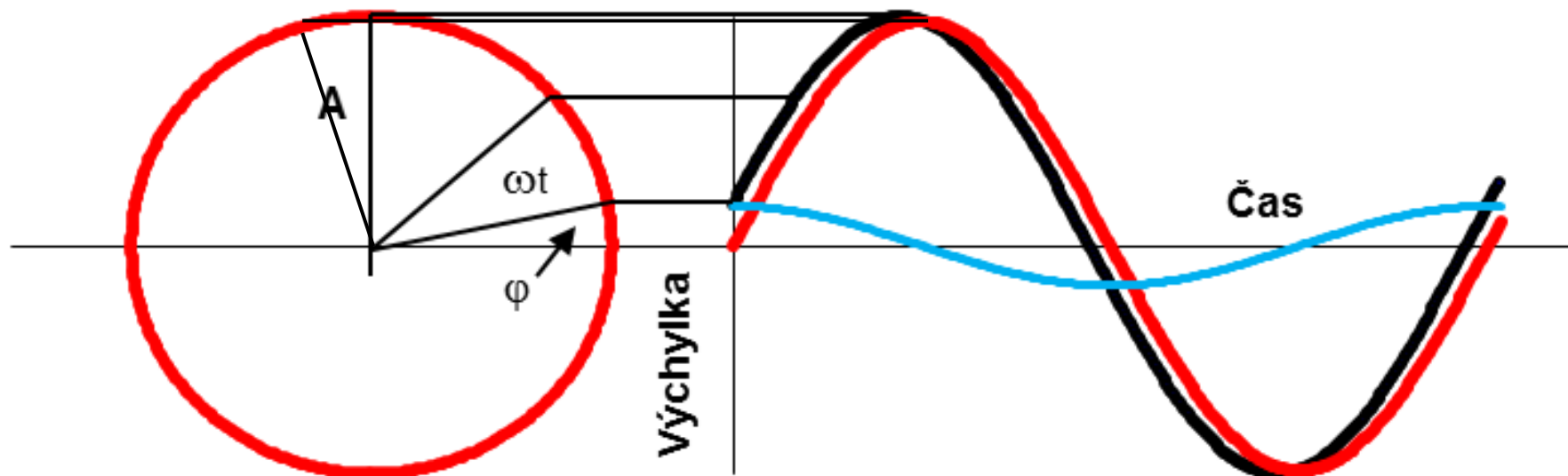
$$x(t + T) = x(t)$$

$$A \sin[\omega(t + T) + \varphi] = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



Rychlost a zrychlení

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Odvození vztahů pro rychlost a zrychlení postupným derivováním

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = v_m \cos(\omega t + \varphi)$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) = a_m \sin(\omega t + \varphi)$$

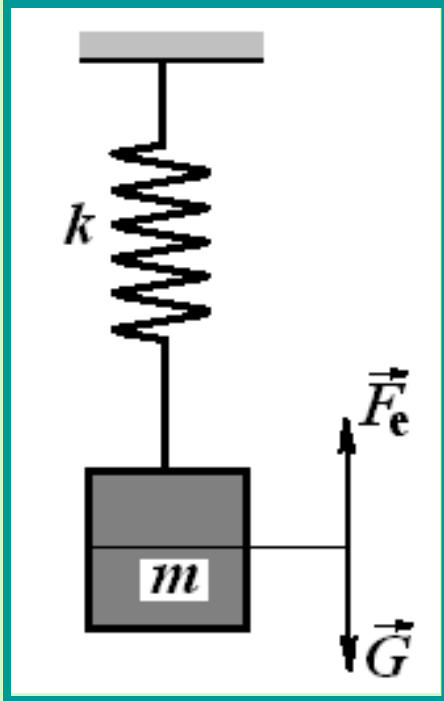
Rychlost je vůči výchylce posunuta o $\pi/2$, zrychlení vůči výchylce je posunuto o π

$$v_m = A\omega$$
$$a_m = -A\omega^2$$

- nepůsobí-li na kmitající systém disipativní síly, kmity jsou netlumené
- ilustrace na svislém kmitavém pohybu

Lineární oscilátor v gravitačním poli

- rozepsat



$$F = -ku + mg = m\ddot{u}$$

Pohybová rovnice

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 \bar{u}(t) = 0 \quad \bar{u}(t) = u(t) - g\omega^{-2}$$

$$u(t) = \bar{u}(t) + g\omega^{-2} = g\omega^{-2} + A\sin(\omega t + \varphi)$$

Lineární harmonický oscilátor v gravitačním poli:

Kmity s frekvencí ω kolem rovnovážné polohy u_R :

$$u_R = g\omega^{-2} = \frac{mg}{k}$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Energie netlumených harmonických kmitů

- **Odvodit potenciální energii ze stlačení pružiny**
 - v rovnovážné poloze předpokládáme potenciální energii $E_p = 0$
 - potenciální energie E_p odpovídající výchylce $\vec{u}(t)$ je dána prací vykonanou vnější silou $\vec{F}^*$, která překonává vnitřní pružnou sílu systému $\vec{F} = -k\vec{u}$, aby byl systém vyveden z rovnovážné polohy
 - je tedy $\vec{F}^* = -\vec{F}$

Energie netlumených harmonických kmitů

Potenciální energie: $dA = \vec{F}^* d\vec{u} = -\vec{F} d\vec{u} = -F du$

$$E_p = \int_0^u dA = -\int_0^u F du' = \int_0^u ku' du' = \frac{1}{2} ku^2$$

$$u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} kU^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Kinetická energie: $v(t) = \dot{u}(t) = U\omega \cos(\omega t + \varphi)$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Celková energie je konstantní, na čase nezávislá:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2$$

- pro netlumené kmity platí zákon zachování mechanické energie

Potenciál lineárního harmonického oscilátoru

$$\bar{u} = \frac{E_p}{m} = \frac{1}{2} \omega^2 U^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (u \omega)^2 = -\frac{1}{2} a u$$

Cvičení

1. Hmotný bod kmitá harmonicky. Pro jeho výchylku platí:

$$\{y\} = 0,3 \sin \left[\frac{1}{4} \pi \{t\} + \frac{1}{3} \pi \right]$$

Určete amplitudu výchylky, periodu a počáteční fázi kmitavého pohybu.

2. Hmotný bod kmitá harmonicky a za 1 minutu vykoná 180 kmitů s amplitudou 1 cm. Počáteční fáze kmitání je 60° . Napište rovnici harmonických kmitů a určete nejmenší dobu t před počátečním okamžikem ($t = 0$), ve kterém byla fáze nulová.

3. Hmotný bod koná harmonický pohyb s amplitudou výchylky 10 cm a dobou kmitu 1 s. Určete: a/ výchylku, rychlost a zrychlení hmotného bodu v čase $1/8$ s od začátku pohybu, b/ dobu pohybu hmotného bodu z polohy rovnovážné do krajní, c/ dobu za jakou vykoná hmotný první polovinu této dráhy, d/ dobu za jakou hmotný bod vykoná druhou polovinu uvažované dráhy. Počáteční fáze kmitavého pohybu je rovna nule.

4. Mechanický oscilátor je tvořen sériově spojenými pružinami o tuhostech k_1 , k_2 a závažím o hmotnosti m . Určete periodu kmitů oscilátoru. Hmotnost pružin a vliv tření zanedbejte.