FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

Tlumený a buzený harmonický pohyb

Technická fakulta

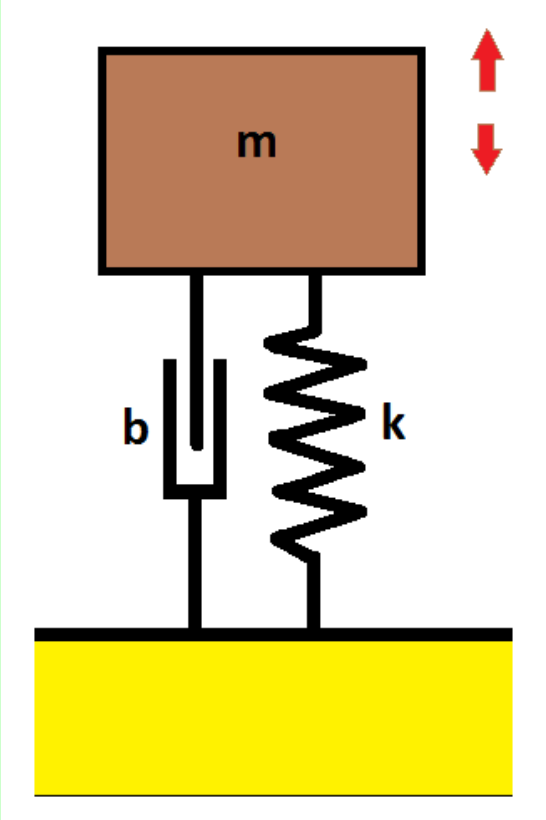
Česká zemědělská univerzita v Praze

Tlumení kmitavých soustav

- v reálných soustavách s disipativními silami je kmitavý pohyb omezen nebo přímo vyloučen
- po vykonání jednoho kmitu se systém nevrátí do původního stavu
- nejde tedy o děj striktně periodický
- pouze u soustav s nízkou hladinou tlumení můžeme děj považovat za kvaziperiodický s tlumením jako „poruchou“
- tlumení je běžný doprovodný jev jakéhokoliv reálného kmitavého pohybu či děje, který je podle potřeby zesilován či potlačován
- častý příklad tlumení kmitů v technických systémech a strojích obecně
- simulace

Lineární harmonický oscilátor

Tlumený



- vznikne z lineárního harmonického oscilátoru paralelním přiřazením tlumiče se součinitelem lineárního odporu *b*

- nejjednodušší případ:
brzdící odporová síla je přímo úměrná rychlosti kmitání

Tlumící síla úměrná rychlosti

$$\vec{F}_b = -b\vec{v}, \quad b \succ 0$$

F_b brzdící (odporová) síla,

b součinitel lineárního odporu

$$m\ddot{x} = F + F_b$$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

pohybová rovnice

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0}$$

δ dekrement útlumu

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{b}{2m}$$

Pohybová rovnice je opět obyčejná lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními parametry a nulovou pravou stranou.

$$x(t) = e^{\lambda t}$$ ← **tvar řešení**

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$ ← **charakteristická rovnice – odvodit rovnici + řešení**

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm D \qquad D^2 = \delta^2 - \omega^2$$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}$$ ← **obecné řešení: rovnice (1)**

C_1, C_2 – z počátečních podmínek pohybu

λ_1, λ_2 obecně komplexní čísla

4 případy řešení:

I. Zanedbatelný útlum

$\delta/\omega << 1$

$D^2 \sim -\omega^2$

tento stav můžeme charakterizovat jako případ téměř netlumených harmonických kmitů

$$\boxed{\tilde{\omega}^2 = \omega^2 = k/m}$$

- výsledná úhlová frekvence tlumených kmitů = vlastní úhlové frekvenci oscilátoru

Změna frekvence oscilátoru je v tomto případě vyvolána změnami v některé z veličin *k* a *m*

II. Tlumené periodické kmity

(0 < δ/ω < 1)

V tomto případě je D^2 záporné a kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní čísla:

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

$\tilde{\omega}^2 = \frac{k}{m} - \delta^2$ **je úhlová frekvence tlumených harmonických kmitů, která je menší než úhlová frekvence *ω***

$x(t) = C_1 e^{(-\delta + i\tilde{\omega})t} + C_2 e^{(-\delta - i\tilde{\omega})t}$ **- řešení rovnice (1)**

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 e^{i\tilde{\omega}t} + C_2 e^{-i\tilde{\omega}t}\right] = A e^{-\delta t}\sin(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

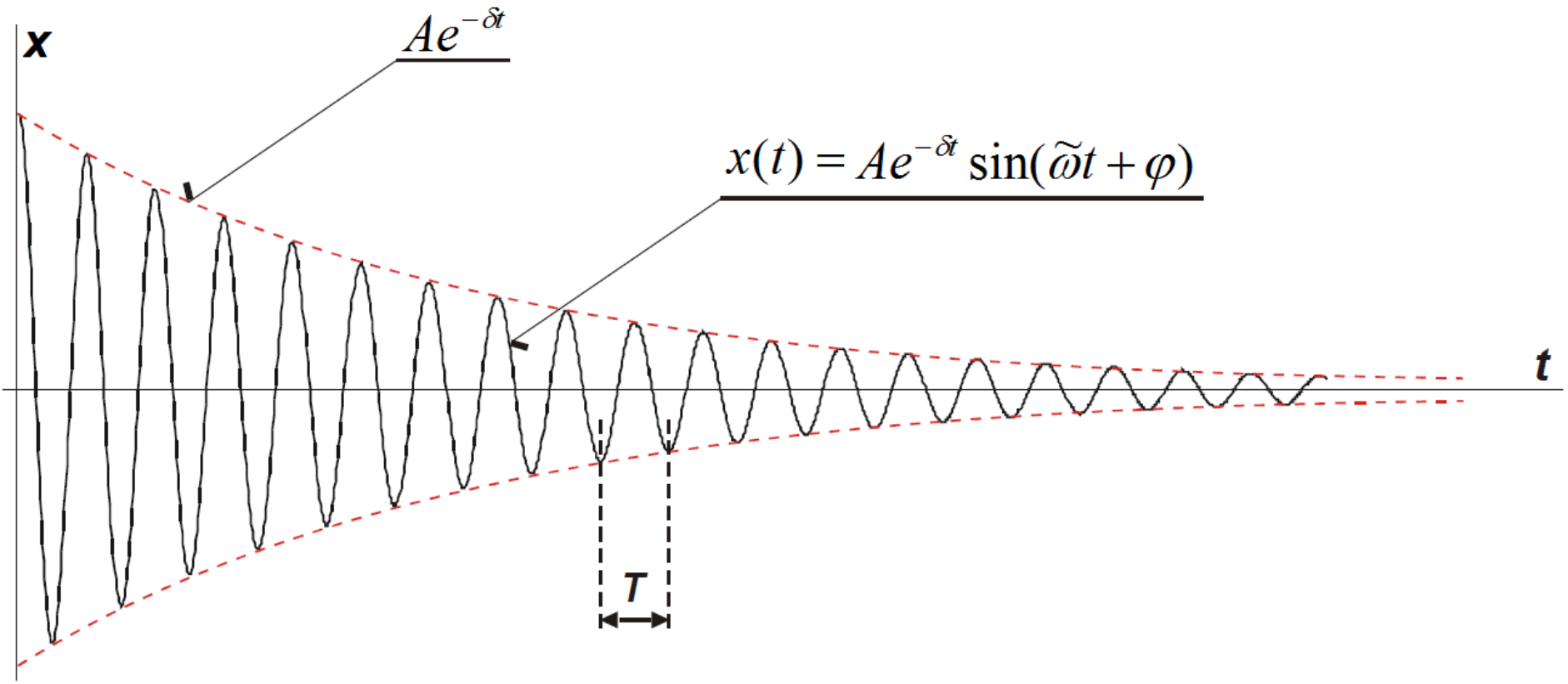
A, φ **- nové integrační konstanty – určeny z počátečních podmínek**

<u>Tlumené harmonické kmity</u>

- nejde striktně vzato o periodický děj – amplituda kmitů exponenciálně klesá v čase – viz obr.

II. Tlumené periodické kmity

(0 < δ/ω < 1)



Rychlost a zrychlení

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\tilde{\omega}e^{-\delta t}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi) - A\delta e^{-\delta t}\sin(\tilde{\omega}t + \varphi) =$$
$$= Ae^{-\delta t}\left[\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi) - \delta\sin(\tilde{\omega}t + \varphi)\right]$$

simulace

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\delta e^{-\delta t}\left[\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi) - \delta\sin(\tilde{\omega}t + \varphi)\right] +$$
$$+ Ae^{-\delta t}\left[-\tilde{\omega}^2\sin(\tilde{\omega}t + \varphi) - \delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)\right] =$$
$$= Ae^{-\delta t}\left[-\delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi) + \delta^2\sin(\tilde{\omega}t + \varphi) - \tilde{\omega}^2\sin(\tilde{\omega}t + \varphi) - \delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)\right] =$$
$$= Ae^{-\delta t}\sin(\tilde{\omega}t + \varphi)\left[\delta^2 - \tilde{\omega}^2\right] - 2Ae^{-\delta t}\delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi) =$$
$$= x(t)[\delta^2 - \tilde{\omega}^2] - 2Ae^{-\delta t}\delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

Útlum

- poměr 2 po sobě následujících maximálních výchylek na stejnou stranu od rovnovážné polohy:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{Ae^{-\delta(t_1+T)}\sin\left[\tilde{\omega}(t_1+T)+\varphi\right]}{Ae^{-\delta t_1}\sin\left[\tilde{\omega}t_1+\varphi\right]} = e^{-\delta T} = konst.$$ – útlum

$$\boxed{\vartheta = \ln(x_i/x_{i+1}) = \delta T = 2\pi\frac{\delta}{\tilde{\omega}}}$$ logaritmický dekrement útlumu

- při srovnání tlum. a netlum. kmitů, platí:

$$\boxed{\frac{\omega_0}{\tilde{\omega}} = \frac{T}{T_0} = \sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{4\pi^2}}}$$ - odvodit

$$\boxed{\tau = 1/\delta}$$ - časová konstanta tlumení

- vyjadřuje čas, během něhož se amplituda kmitů e-krát sníží:

$$\boxed{x(t) = e^{-t/\tau}\left[C_1 e^{i\tilde{\omega}t} + C_2 e^{-i\tilde{\omega}t}\right] = Ae^{-t/\tau}\sin(\tilde{\omega}t+\varphi)}$$

Vliv útlumu na změnu periodicity tlumených kmitů:

Spočítat:

Útlum	ϑ	Poměr period
1	0	1
0,5	0,6931	1,0061
0,1	2,3026	1,0650
0,05	2,9957	1,1078
0,01	4,6052	1,2398

III. Kritický útlum

- astatický pohyb (δ/ω = 1)

Je-li $\delta/\omega = 1$, pak $D = 0$ a řešením charakteristické rovnice je dvojný kořen

$\lambda_{1,2} = -\delta$. Pohyb přestává být pohybem periodickým.

Obecné řešení pohybové rovnice má tvar:

$$\boxed{x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t)}$$

Má-li oscilátor v okamžiku $t = 0$ výchylku z rovnovážné polohy $x_0 = A$ a nulovou rychlost $v_0 = 0$, rovnice dává :

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t), \quad x(0) = C_1 = A$$

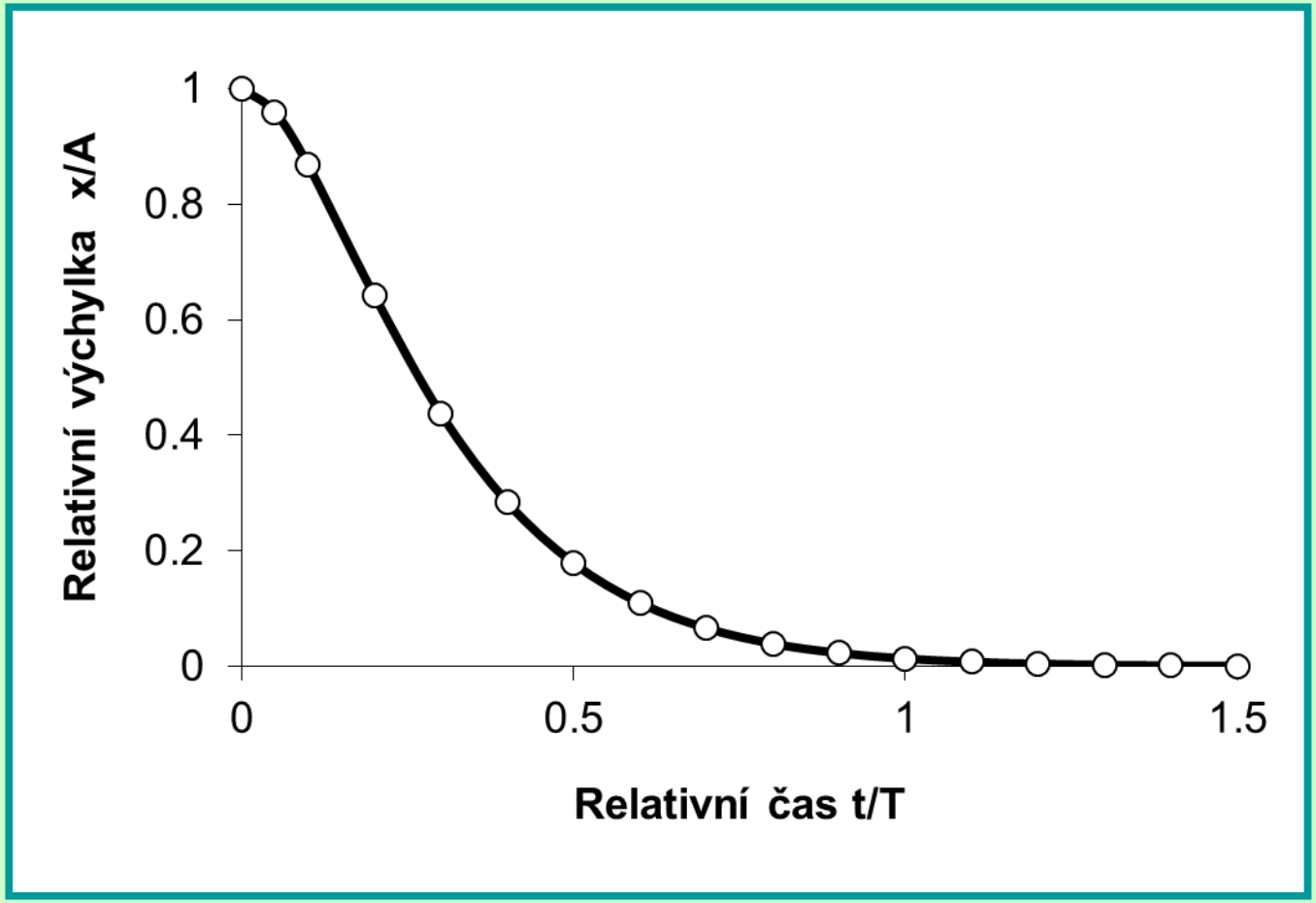
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = C_2 e^{-\delta t} - \delta(C_1 + C_2 t)e^{-\delta t}, v(0) = C_2 - \delta C_1 = 0$$

$$C_2 = \delta C_1 = \delta A$$ **- spočítat**

Platí tedy: $$\boxed{x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t) = Ae^{-\delta t}(1 + \delta t)}$$

Kritického útlumu se využívá při tlumení pohybu všude tam, kde je třeba, aby se nejrychleji ustavila rovnovážná poloha.

III. Astatický pohyb



IV. Přetlumené kmity - silný útlum

(δ/ω > 1)

Je-li $D^2 = \delta^2 - \omega^2 > 0$, potom oba kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a kladné. Obecné řešení rovnice (1) má pak neharmonický charakter. Tlumení je v tomto případě tak velké, že systém se po vychýlení z rovnovážné polohy do ní vrací zpět jen velmi pomalu. Koná při tom tzv. *aperiodický (přetlumený) pohyb.*

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta+D)t} + C_2 e^{(-\delta-D)t} = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{Dt} + C_2 e^{-Dt}\right)$$

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sinh(Dt+\varphi) = Ae^{-\delta t}\frac{e^{(Dt+\varphi)} - e^{-(Dt+\varphi)}}{2} =$$

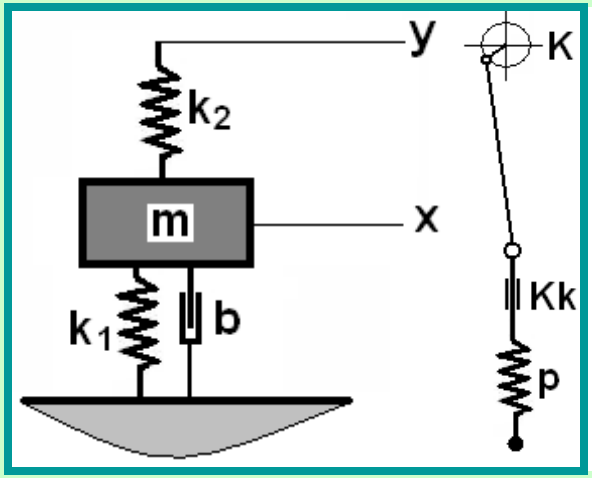
$$= Ae^{-\delta t}\frac{e^{(Dt+\varphi)} - e^{-(Dt+\varphi)}}{2} = Ae^{-\delta t}\frac{e^{\left(\sqrt{\left(\delta^2-\omega^2\right)}t+\varphi\right)} - e^{-\left(\sqrt{\left(\delta^2-\omega^2\right)}t+\varphi\right)}}{2}$$

- veličiny C_1, C_2 a A, φ jsou určeny počátečními podmínkami stejně jako u jiných případů

Lineární harmonický oscilátor

s buzením a tlumením

<u>Budící síla:</u> Nucený kmitavý pohyb koná systém vlivem působení časově proměnné, obvykle periodické, vnější budící síly $\vec{F}_B(t) = \vec{B}\sin(\Omega t + \beta)$
vlastní frekvence systému *ω*, frekvence budících harmonických kmitů *Ω*



$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + B\sin(\Omega t + \beta)$$ - pohyb. rovnice

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{B}{m}\sin(\Omega t + \beta)}$$

obyčejná lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, nehomogenní

- její řešení lze napsat jako součet obecného řešení $x_b(t)$ příslušné homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení $x_p(t)$ celé rovnice

$$x_p(t) = C\sin(\Omega t + \beta + \gamma)$$

$$\boxed{x(t) = x_b(t) + x_p(t)}$$

$$\boxed{x(t) = x_b(t) + x_p(t) = Ae^{-\delta t}\sin\left[\left(\omega^2 - \delta^2\right)t + \varphi\right] + C\sin(\Omega t + \beta + \gamma)}$$

Řešení

Simulace

Výchylka tlumeného pohybu klesá exponenciálně s rostoucím časem a po uplynutí určité doby zbývají prakticky jen netlumené kmity, jejichž frekvence je rovna frekvenci budících kmitů *Ω* vnější budící síly. Pak koná oscilátor již jen kmity se stejnou frekvencí, jakou na něj působí vnější periodická proměnná síla a těmto kmitům říkáme nucené kmity. **Rozepsat:**

Shoda řešení s diferenciální rovnicí pro argument fce sin:

0 $$2m\delta C\Omega = -B\sin\gamma$$

π/2 $$-mC\Omega^2 + mC\omega^2 = B\cos\gamma$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\gamma = -\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}$$

$$\boxed{C = \frac{B}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}}$$

$$\boxed{\sin\gamma = -\frac{2\delta m\Omega C}{B}}$$

Důsledky řešení

- **po určité době od začátku působení síly nastane ustálený stav a systém již kmitá periodicky**
- **vlastní kmity systému po určité době odezní a systém se ustálí na netlumeném harmonickém kmitání s frekvencí Ω**
- **vliv tlumení se však promítne jak do amplitudy buzených kmitů – viz**

$$\boxed{C = \frac{B}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}}$$

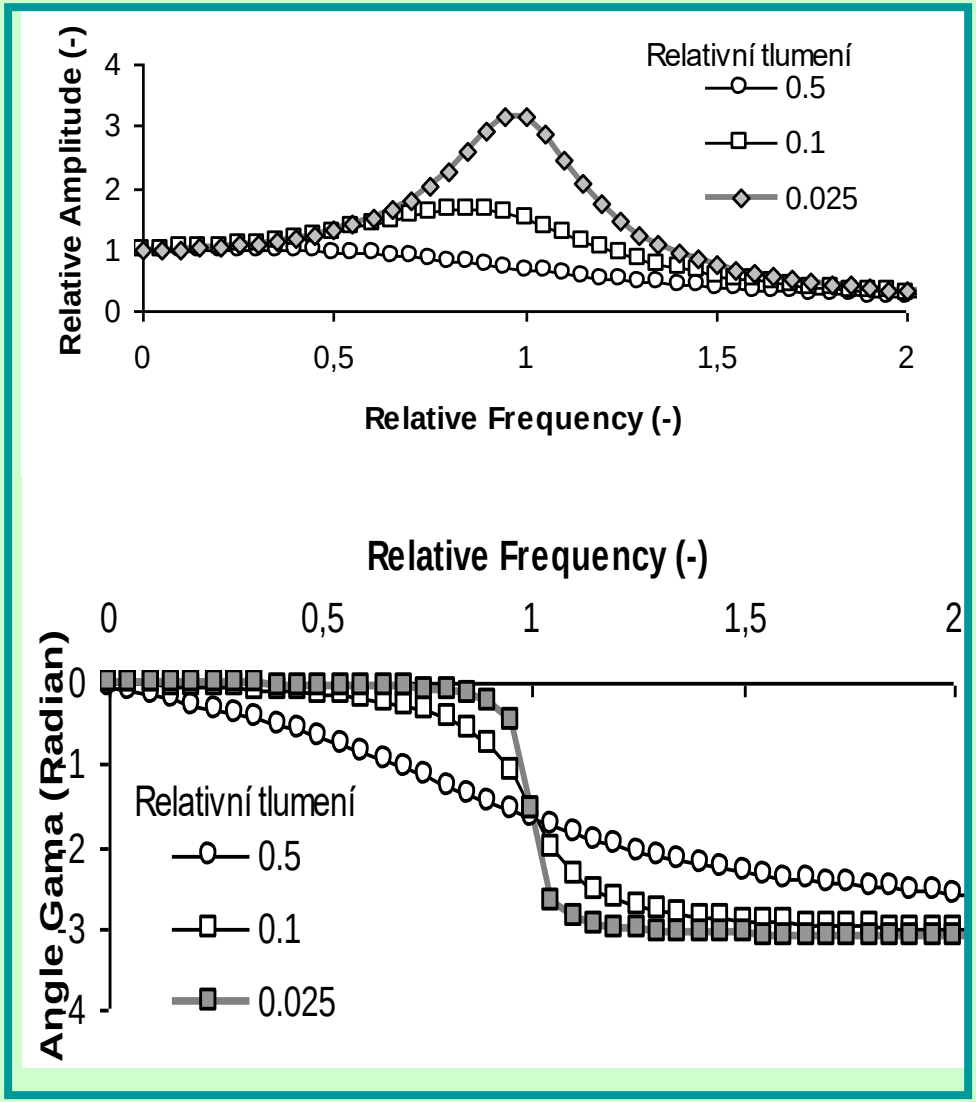
a rovněž do jejich fáze – viz $\boxed{\operatorname{tg}\gamma = -\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}$ **a** $\boxed{\sin\gamma = -\frac{2\delta m\Omega C}{B}}$

- **obě konstanty *A*, *φ*, přítomné v řešení rovnice**

$$\boxed{x(t) = x_b(t) + x_p(t) = Ae^{-\delta t}\sin\left[\left(\omega^2 - \delta^2\right)t + \varphi\right] + C\sin\left(\Omega t + \beta + \gamma\right)}$$

ztrácí svůj vliv v průběhu tlumení tak, jak $x_b(t) \to 0$

Rezonance buzených kmitů



Rozdíl $\omega^2 - \Omega^2$ ve jmenovateli výrazu pro C ukazuje, že amplituda *C* vynucených kmitů je tím větší, čím je menší rozdíl mezi úhlovou frekvencí ω vlastních netlumených kmitů a úhlovou frekvencí Ω kmitů vynucených. To je *rezonance*. Závislost amplitudy vynucených kmitů na frekvenci budících kmitů $C = C(\Omega)$ nazýváme *rezonanční křivkou v amplitudě*.

Činitel jakosti a energie buzených kmitů

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta_T W}$$

***Q* – charakteristika kmitajícího systému**

2π násobek poměru průměrné energie oscilátoru $\overline{W}$ k energii $\Delta_T W$ rozptýlené tlumící silou za dobu jedné periody

$$\overline{W} = \frac{1}{2} m v_m^{\ 2} = \frac{1}{2} m \Omega^2 C^2 = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{m} \frac{B^2}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta_T W} = \frac{\Omega}{2\delta}$$

$$\Delta_T W = -\int_0^T F_t dx = 2\delta m \Omega^2 C^2 \int_0^T \cos^2 \Omega t dt$$ **rozepsat**

$$\Delta_T W = 2\pi\delta m \Omega C^2 = 2\pi \frac{B^2}{m} \frac{\delta\Omega}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$

- **při velké hodnotě činitele jakosti *Q* je <u>akumulovaná energie podstatně větší</u> než energie dodávaná kmitu během jednoho cyklu.**
- **každý oscilátor je plně charakterizován vlastní frekvencí a činitelem jakosti a to bez ohledu na to o jaký kmitavý proces jde a jakého charakteru je ztrátový výkon.**

Rezonance při nízkém tlumení

($\delta \ll \omega$)

- při nízkých hodnotách tlumení lze zanedbat δ a za rezonanci považujeme případ, kdy $\omega = \Omega$

- **fázový posuv γ mezi budící silou a nucenými kmity ve stavu rezonance právě -π/2 – viz graf**

- **tento fázový posuv zajišťuje, že budící síla působí stále ve smyslu „pohybu“ oscilátoru a koná stále kladnou práci**

<u>Ustálení</u>:

- veškerá práce konaná budící silou se nejprve spotřebuje na přemáhání odporů, kterými se kmity tlumí – roste amplituda kmitů a jejich energie

- poté dosahuje amplituda a přibližně také energie ustálené maximální hodnoty

Cvičení

1. Odvoďte vztah pro poměr mezi m-tou a n-tou maximální výchylkou oscilátoru (*m* je větší než *n*).

2. Vypočtěte relativní výchylku tlumeného oscilátoru s dekrementem útlumu $\delta = 2\omega$ a a srovnejte se stejnou závislostí vypočtenou pro oscilátor s kritickým útlumem ($\delta = \omega$).

3. Vypočtěte relativní výchylku tlumeného oscilátoru pro případ s dekrementem útlumu $\delta = n\omega$, kde n je číslo větší než 1. Výsledek porovnejte s relativní výchylkou u oscilátoru s kritickým útlumem.

4. Pro pokročilejšího čtenáře:
   Prostudujte práci Torzo, G., Peranzoni, P., 2009: The real pendulum: theory, simulation, experiment. Lat. Am. J. Phys. Educ. 3, 221-228. (http://www.journal.lapen.org.mx/May09/LAJPE%20241%20preprint%20f.pdf), a sestavte pohybovou rovnici kyvadla s velkou amplitudou kyvů při působení tlumení. Numericky řešte získanou rovnici a diskutujte anharmonické efekty v souvislosti s tlumením.