FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

VII. Vlastnosti postupného a stojatého vlnění

Technická fakulta

Česká zemědělská univerzita v Praze

Literatura ke kapitole 7

Brepta, R., Prokopec, M.: Šíření napěťových vln a rázy v tělesech. Academia Praha 1972. 521 s.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha 1994, 589 s.

Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.

Friš, S.E., Timoreva, A.V.: Kurs fysiky I. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1953, 376 s.

Havránek, A.: Viskoelasticita. In: Základy fyzikálních měření, část IIb (Jaromír Brož a kol.), s. 357-376. SPN Praha, 1974.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.

Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.

Skudrzyk, E.: Simple and Complex Vibrating Systems. The Pennsylvania State University Press, University Park 1969, 500 s.

Yamamoto, H., Haginuma, S. 1984. Estimation of the dynamic Young's modulus of apple flesh from natural frequency of an intact apple. Report National Food Research Institute, 44, 30–35.

Vznik stojatého vlnění

- interferencí protisměrných postupných vln z míst o souřadnicích x_1 a x_2 s fázemi

$$\varphi_1 = -\frac{\omega}{c}(x - x_1), \quad \varphi_2 = \frac{\omega}{c}\left(x - x_2\right)$$

- obě vlny budou mít stejné fáze v místech o souřadnicích x_k, daných podmínkou: $\varphi_1 = \varphi_2 + k.2\pi$, kde k = 1, 2, 3, …

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{kc\pi}{\omega} = \bar{x} - \frac{k}{2}\lambda$$

- rozepsat

$\bar{x}$ - střední vzdálenost mezi oběma zdroji

<u>Transformace souřadnic:</u> $x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{kc\pi}{\omega} = \bar{x} - \frac{k}{2}\lambda$ - nový počátek

$z = x - \bar{x}$, $\delta_v = (x_2 - x_1)/2$

$$x - x_1 = z + \frac{x_2 - x_1}{2} = z + \delta_v$$

$$x - x_2 = z + \frac{x_1 - x_2}{2} = z - \delta_v$$

$$\varphi_1 = -\frac{\omega}{c}(z + \delta_v), \quad \varphi_2 = \frac{\omega}{c}\left(z - \delta_v\right)$$

- rozepsat

$\varphi_1 = -\omega t_s - 2\pi \frac{z}{\lambda}, \quad \varphi_2 = -\omega t_s + 2\pi \frac{z}{\lambda}$, kde $t_s = \delta_v/c$ - čas setkání se obou vln uprostřed intervalu (x_1, x_2)

Vznik stojatého vlnění

- obě protisměrné vlny lze pak zapsat:

Stejná amplituda protisměrných vln

$$u_1 = A\sin[\omega(t - t_s) - 2\pi \frac{z}{\lambda}]$$

$$u_2 = A\sin[\omega(t - t_s) + 2\pi \frac{z}{\lambda}]$$

- obě výchylky se liší znaménkem fáze

Složení obou vln:

$$\boxed{u = u_1 + u_2 = 2A\cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \sin \omega\left(t - t_s\right)}$$

Z výsledné rovnice plyne: interferencí dvou postupných protiběžných vln vznikají harmonické kmity se stejnou fází, ale proměnlivou amplitudou $A_v = 2A\cos(2\pi z/\lambda)$, která závisí na souřadnici z, tj. vzdálenosti daného bodu od $\bar{X}$.

Největší výkmit 2*A* odpovídá místům s největší amplitudou A_v, tedy tam kde $\cos(2\pi z/\lambda)$ nabývá hodnot ±1, tj. pro $2\pi z/\lambda = 0, \pi, 2\pi$, .. Body s tímto maximálním výkmitem se nazývají ***kmitny***. Uprostřed mezi kmitnami leží body v nichž je amplituda A_v nulová. Tyto body nazýváme ***uzly***.

Animace

Souřadnice – kmitny: $z = \pm k\lambda/2$

Stojaté podélné vlnění

Souřadnice – uzly: $z = \pm(2k+1)\lambda/4$

Při postupném vlnění kmitají všechny body se stejným výkmitem, avšak různou fází, která se šíří fázovou rychlostí vlnění. Při stojatém vlnění kmitají všechny body se stejnou fází v bodech vzdálených od sebe o vlnovou délku a s opačnou fází v bodech vzdálených o půl vlny. Výkmit v případě stojatých vln je periodicky závislý na poloze bodu.

Stojaté kmity ve strunách

Obecně platí: Pokud se postupná vlna odráží na volném resp. pevném konci, odráží se se stejnou resp. opačnou fází a vznikající stojatá vlna má na tomto konci kmitnu resp. uzel

Struny: na obou koncích upevněná a napjatá vlákna z různých materiálů

- volné kmity struny jsou tlumené, harmonické a vznikají interferencí postupných vln odrážejících se od pevných okrajů struny

Okrajové podmínky: na obou koncích struny délky *l* jsou uzly: $n\frac{\lambda_n}{2} = l$

***n* = 1, 2, 3... udává základní (*n* = 1) resp. vyšší frekvenci kmitů (vyšší harmonickou)**

Platí: $\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2\pi c}{\omega_n}$ **, je tedy** $\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

Platí $\boxed{c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}}$**, kde** σ **- normálové napětí ve struně,** ρ **- hustota struny**

Úhlové frekvence struny lze vyjádřit také: $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k_\lambda = c k_\lambda}$ **- dispersní vztah**

- vztah mezi úhl. frekvencí a úhl. vlnočtem $k_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda_n}$

- tato rovnice platí pouze pro celá *n* – má diskrétní (nespojitý) charakter

Stojaté vlny v tenkých tyčích

Elastické řešení

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

- Podélné kmity: **Vlastní kmity tyče jsou určeny stojatými harmonickými vlnami vzniklými interferencí postupných vln v tyči, šířících se oběma hlavními směry. Jejich frekvence je dána podobně jako v případě strun uspořádáním celistvých čtvrtvln podél tyče tak, aby byly zachovány uzly v místě upevnění (fixace) tyče a případných kmiten na volných koncích tyče. Dále je zřejmé, že ani úhlová frekvence vlastních kmitů a ani rychlost jejich šíření tyčí nejsou závislé na průřezu tyče.**

V případě *torsních kmitů* se tvar vlnové rovnice zachovává, pouze modul pružnosti v tahu *E* je v této rovnici nahrazen modulem pružnosti ve smyku *G*, přičemž význam okrajových podmínek zůstává zachován. Největší změna tedy spočívá v rozdílné rychlosti šíření torsních kmitů. Vzhledem k tomu, že $G \approx E/[2(1+\mu)]$, je rychlost torsních vln $\sqrt{2(1+\mu)}$ - krát menší než rychlost šíření podélných vln (μ značí Poissonův poměr).

Příčné kmity: **E je modul pružnosti tyče, J moment setrvačnosti příčného průřezu tyče, l její délka, m' hmotnost jednotkové délky tyče, k_λ úhlový vlnočet, $n = l/\lambda$ počet vlnových délek na délce tyče a K_n konstanta**

$$\omega_n = 2\pi K_n \sqrt{\frac{EJ}{l^4 m'}}$$

Stojaté vlny v dalších objektech

Z hlediska akustiky jsou velmi důležité vlastní kmity desek a blan, které závisejí nejen na jejich rozměrech a tvarech, ale také na místech jejich upevnění. Polohy uzlů a kmiten na rozkmitané desce nebo bláně je možné určit z rozmístění drobných částic nasypaných na jejich povrch. Hrubší částice (např. písek) se usazuje v uzlových bodech nebo čarách a tvoří tzv. <u>Chladniho obrazce</u>. Jemnější částice (např. lykopodium) se usazují naopak v místech kmitových vrcholů (kmiten) a tvoří tzv. <u>Savartovy obrazce</u>.

- viz videa

Velký význam mají tzv. kulové (sferoidální) kmity, tedy kmity kulovitých těles. Mezi těmito kmity velkou úlohu hrají vlastní kmity kulových vesmírných těles, včetně Země.

$$\boxed{f \approx \sqrt{\frac{Er}{m}}}$$

<u>Kmity blan</u>

E **– modul pružnosti,** ***r*** **– poloměr,** ***m*** **- hmotnost**

Energie elastického vlnění

- **šířící se vlna vyvolá změny energie prostředí, kterým vlna prochází**
- **okamžitá výchylka prostředí vyvolaná postupnou vlnou:**

$$\boxed{u(t,x) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

- omezení na část prostředí o <u>objemu</u> Δ*V*, <u>hmotnosti</u> Δ*m*, <u>hustotě</u> *ρ* a <u>výchylce</u> prostředí z rovnovážné polohy *u*

$$v(t,x) = \frac{du}{dt} = A\omega\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

$$E_p = \int_0^{\Delta l} F dl = \int_0^{\Delta l} ES\frac{\Delta l}{l_0}d(\Delta l) = \frac{1}{2}ES\frac{\Delta l^2}{l_0} = \frac{1}{2}ESl_0\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \quad \frac{\Delta l}{l_0} \approx \frac{du}{dx} = -\frac{A\omega}{c}\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\frac{EA^2\omega^2\Delta V}{c^2}\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

- ze srovnání vztahů pro E_k a E_p plyne, že obě části energie jsou ve fázi (zároveň dosahují maxima a minima) - to je podstatná odlišnost energie části prostředí od energie prostého kmitajícího bodu

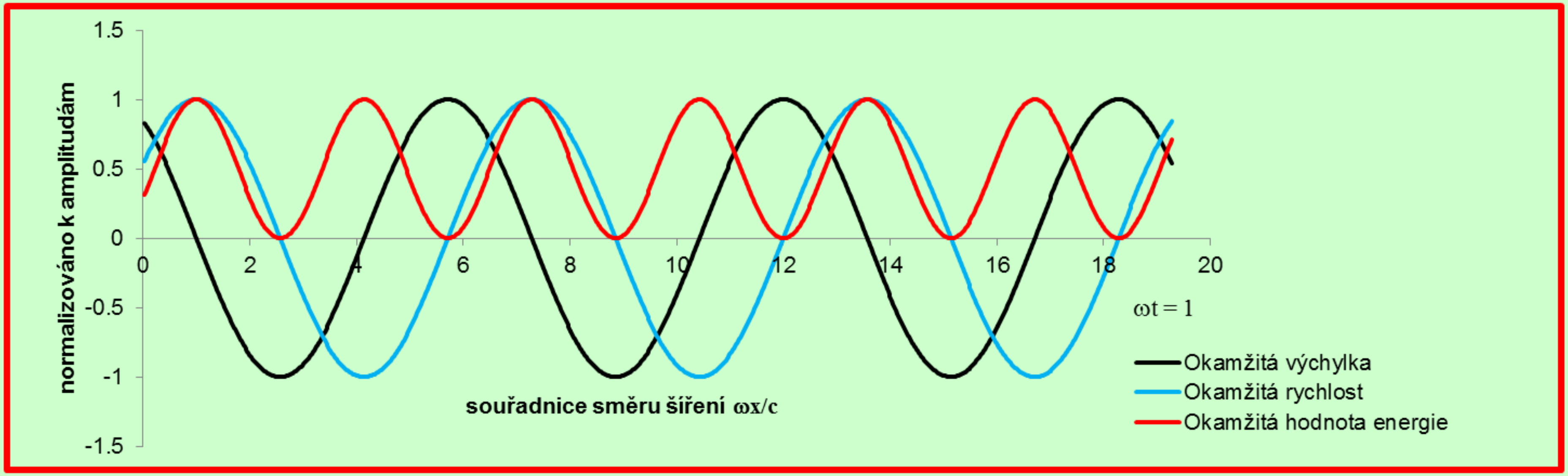
Energie elastického vlnění

- celková energie části prostředí nezůstává konstantní (na rozdíl od celkové energie kmitání samostatného hmotného bodu, ale platí:

$$\boxed{E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{E}{c^2}\right)A^2\omega^2\Delta V \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

V elastickém prostředí $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ **, potom:** **- rozepsat (vyjádřením hustoty)**

$$\boxed{E_c = \rho A^2\omega^2\Delta V \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$



Hustota energie, tok vlnění

$$\boxed{w = \frac{E_c}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Hustota energie v elastickém prostředí

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

Střední hustota energie

$$\boxed{P_e = \overline{w} S c = \frac{S}{2}\rho A^2 \omega^2 c}$$

Střední tok vlnění plochou *S* (W)

$$\boxed{\Psi = \frac{P_e}{S} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 c}$$

Hustota toku vlnění (W.m^{-2})

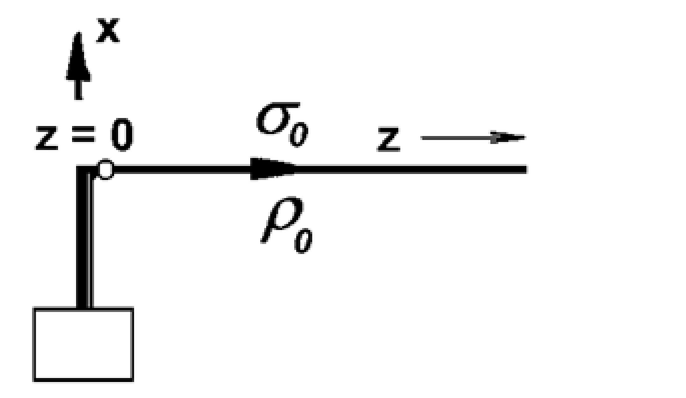
$$\boxed{\Psi_k = \frac{P_e}{4\pi R^2}}$$

Hustota toku vlnění kulové vlny ve vzdálenosti *R* od jejího zdroje

Animace zdrojů: **jednoduché**

další

Vznik postupné vlny ve struně



$$c = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho_0}}$$

c – fázová rychlost příčných vln ve struně

σ_0 – osové napětí ve struně

ρ_0 – hustota struny

- struna reprezentuje otevřený systém, ve kterém je buzena postupná vlna šířící se v kladném směru *z*:

$$\boxed{u(t,z) = A\sin(\omega t - k_\lambda z)}$$

$k_\lambda = 2\pi/\lambda = \omega/c$ - úhlový vlnočet

Zavádíme veličinu charakterizující stav konkrétní struny, konstantu nezávislou na pohybu struny. Je to <u>kalibrační konstanta</u> zprostředkovávající vztah mezi počáteční příčnou rychlostí vlny *c* a brzdícím napětím σ_0. Nazývá se <u>*akustický odpor Z*</u>.

$$\boxed{Z = \frac{\sigma_0}{c} = \sigma_0\sqrt{\frac{\rho_0}{\sigma_0}} = \sqrt{\sigma_0\rho_0}}$$

Ukončení a spojení strun

Buzená vlna je popsána rovnicí: $u_1(t,z) = A\sin(\omega t - k_{\lambda 1} z)$

V místě přechodu z prostředí o akustickém odporu Z_1 do prostředí o akustickém odporu Z_2 dochází ke vzniku odražené vlny, která se skládá s původní vlnou.

Úplná výchylka *u* po složení přímé a odražené vlny pro *z* < 0 je pak dána rovnicí:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,z) &= u_1(t,z) + RA\sin(\omega t + k_{\lambda 1} z), \\ u(t,z) &= A\sin(\omega t - k_{\lambda 1} z) + RA\sin(\omega t + k_{\lambda 1} z) \quad \text{(a)}, \end{aligned}}$$

kde *R* je koeficient odrazu

$$\boxed{R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

- rovnice ukazuje, že odražená vlna je vůči dopadající vlně fázově posunutá (rozdíl ve znaméncích u členu $k_{\lambda 1}z$).

Průchod vlny rozhraním strun

Vlna obecně prochází rozhraním mezi strunami. Obecně tento fakt můžeme vyjádřit rovnicí vlny v prostředí pro *z* > 0:

$$u_2(t,z) = TA\sin(\omega t - k_{\lambda 2} z)$$

kde *T* je koeficient průchodu,
A je amplituda dopadající vlny,
$k_{\lambda 2}$ je úhlový vlnočet v prostředí pro *z* > 0

Protože výchylka vln v obou částech prostředí musí být na rozhraní spojitou funkcí, musí platit:

$$u_2(t,0) = u(t,0) = (1+R)u_1(t,0) - \text{viz (a), tj. } TA\sin\omega t = (1+R)A\sin\omega t \Rightarrow \boxed{T = 1+R}$$

- rozepsat

Průchod vlny rozhraním strun

Různé varianty spojení struny s dalším prostředím:

Název	R	T	Z_2/Z_1	**Charakteristika**
Pevné spojení	**-1**	**0**	∞	**Nekonečný odpor Z_2, stojaté vlnění s uzlem pro $z = 0$**
Prostý přechod	**0**	**1**	**1**	**Shoda impedancí (ne shoda prostředí)**
Volný konec	**1**	**2**	**0**	**Nulový odpor Z_2, čistá stojatá vlna s uzlem pro $z = -\lambda/4$ a kmitnou pro $z = 0$**

- **pokud R je větší než -1 a menší než 1, pak vlna vzniklá superpozicí původní a odražené vlny <u>není ani čistě stojatou a ani čistě postupnou vlnou</u>**

- **takováto vlna se nazývá sinusoidální vlnou**

- **každá sinusoidální vlna může být reprezentována superpozicí dvou vln buď stojatých, anebo postupných s opačným směrem šíření**

[Odraz vlny na rozhraní]