FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

V. Vynucené kmity

Technická fakulta

Česká zemědělská univerzita v Praze

Literatura ke kapitole 5

Brepta, R., Prokopec, M.: Šíření napěťových vln a rázy v tělesech. Academia, Praha 1972. 521 s.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha 1994, 589 s.

Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.

Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.

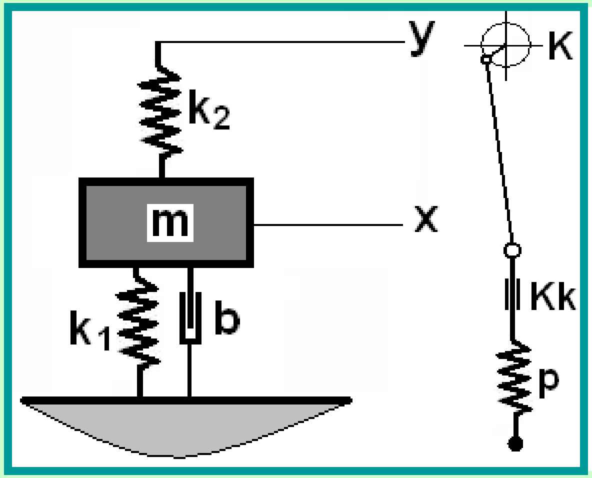
Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.

Lineární harmonický oscilátor

s buzením a tlumením

Budící síla: Nucený kmitavý pohyb koná systém vlivem působení časově proměnné, obvykle periodické, vnější budící síly $\vec{F}_B(t) = \vec{B}\sin(\Omega t + \beta)$
vlastní frekvence systému *ω*, frekvence budících harmonických kmitů *Ω*

$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + B\sin(\Omega t + \beta)$ - pohyb. rovnice



$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{B}{m}\sin(\Omega t + \beta)}$$

obyčejná lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, nehomogenní

- její řešení lze napsat jako součet obecného řešení $x_b(t)$ příslušné homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení $x_p(t)$ celé rovnice

$x_p(t) = C\sin(\Omega t + \beta + \gamma)$

$$\boxed{x(t) = x_b(t) + x_p(t)}$$

$$\boxed{x(t) = x_b(t) + x_p(t) = Ae^{-\delta t}\sin\left[\left(\omega^2 - \delta^2\right)t + \varphi\right] + C\sin(\Omega t + \beta + \gamma)}$$

Řešení

Simulace

Výchylka tlumeného pohybu klesá exponenciálně s rostoucím časem a <u>po uplynutí určité doby zbývají prakticky jen netlumené kmity,</u> jejichž frekvence je rovna frekvenci budících kmitů *Ω* vnější budící síly. Pak koná oscilátor již jen <u>kmity se stejnou frekvencí</u>, jakou na něj působí vnější periodická proměnná síla a těmto kmitům říkáme nucené kmity.

Rozepsat:

Shoda řešení s diferenciální rovnicí pro argument fce sin:

0

$$2m\delta C\Omega = -B\sin\gamma$$

π/2

$$-mC\Omega^2 + mC\omega^2 = B\cos\gamma$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\gamma = -\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}$$

$$\boxed{C = \frac{B}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}}$$

$$\boxed{\sin\gamma = -\frac{2\delta m\Omega C}{B}}$$

Důsledky řešení

- **po určité době od začátku působení síly nastane ustálený stav a systém již kmitá periodicky**
- **vlastní kmity systému po určité době odezní a systém se ustálí na netlumeném harmonickém kmitání s frekvencí Ω**
- **vliv tlumení se však promítne jak do amplitudy buzených kmitů – viz**

$$\boxed{C = \frac{B}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}}$$

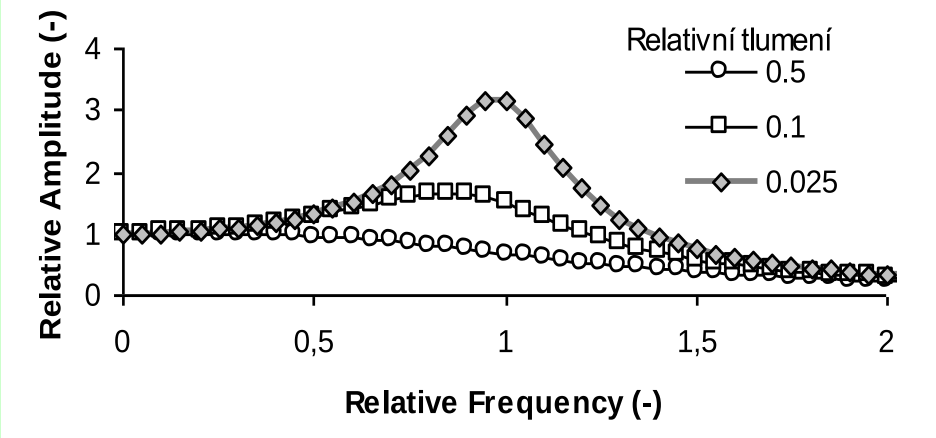
a rovněž do jejich fáze – viz $\boxed{\mathrm{tg}\,\gamma = -\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}$ **a** $\boxed{\sin\gamma = -\frac{2\delta m\Omega C}{B}}$

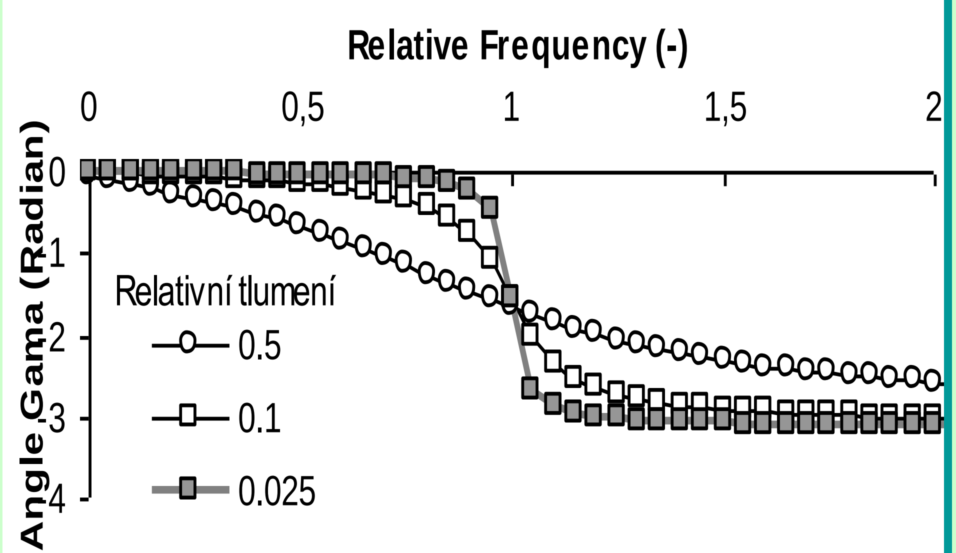
- **obě konstanty *A, φ*, přítomné v řešení rovnice**

$$\boxed{x(t) = x_b(t) + x_p(t) = Ae^{-\delta t}\sin\left[\left(\omega^2 - \delta^2\right)t + \varphi\right] + C\sin\left(\Omega t + \beta + \gamma\right)}$$

ztrácí svůj vliv v průběhu tlumení tak, jak $x_b(t) \to 0$

Rezonance buzených kmitů





Rozdíl $\omega^2 - \Omega^2$ ve jmenovateli výrazu pro C ukazuje, že amplituda *C* vynucených kmitů je tím větší, čím je menší rozdíl mezi úhlovou frekvencí ω vlastních netlumených kmitů a úhlovou frekvencí Ω kmitů vynucených. To je *rezonance*. Závislost amplitudy vynucených kmitů na frekvenci budících kmitů $C = C(\Omega)$ nazýváme *rezonanční křivkou v amplitudě*.

Normalizace buzených kmitů:
jejich vyjádření pomocí relativních veličin

Relativní frekvence $\Omega_R = \Omega/\omega$
Relativní amplituda $C/C_s = Cm\omega^2/B$, kde $C_s = B/(m\omega^2)$ – statická výchylka (amplituda pro $\Omega = 0$)
Relativní tlumení $\delta_R = \delta/\omega$

Relativní veličiny

$$C_R = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega_R{}^2\right)^2 + 4\delta_R{}^2 \Omega_R{}^2}}$$

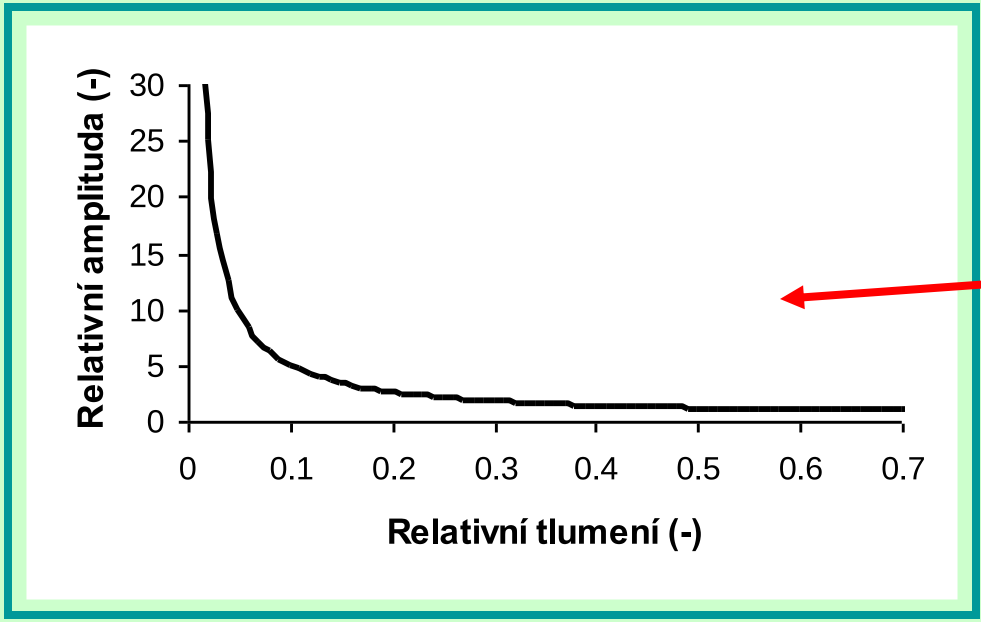
$$\mathrm{tg}\,\gamma = -\frac{2\delta_R \Omega_R}{1 - \Omega_R{}^2}$$

Hodnota fázového posunutí γ vůči působící síle je trvale záporná. Při rovnosti $\Omega = \omega$ je odezva posunuta o π/2 – viz graf str. 6

V blízkosti vlastní frekvence ω je však budící síla přibližně ve fázi s rychlostí pohybu a tato shoda je zdrojem rezonance.

Rezonanční stav ($\delta_R < 1/\sqrt{2}$):

$$\Omega_{Rr} = \sqrt{1 - 2\delta_R{}^2}$$



$$C_{R\,max} = \frac{1}{2\delta_R \sqrt{1 - \delta_R{}^2}}$$

Pro relativní hodnoty tlumení větší než 1/√2 se rezonanční stav nepozoruje.

Činitel jakosti a energie buzených kmitů

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta_T W}$$

Q **– charakteristika kmitajícího systému**

2π násobek poměru průměrné energie oscilátoru $\overline{W}$ k energii Δ$_T$*W* rozptýlené tlumící silou za dobu jedné periody

$$\overline{W} = \frac{1}{2} m v_m{}^2 = \frac{1}{2} m\Omega^2 C^2 = \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{m}\frac{B^2}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$

$$\Delta_T W = -\int_0^T F_t dx = 2\delta m\Omega^2 C^2 \int_0^T \cos^2\Omega t dt$$ **rozepsat**

$$\Delta_T W = 2\pi\delta m\Omega C^2 = 2\pi \frac{B^2}{m}\frac{\delta\Omega}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta_T W} = \frac{\Omega}{2\delta}$$

$$Q_r = \frac{\omega}{2\delta} = \frac{1}{2\delta_R}$$

- **při velké hodnotě činitele jakosti *Q* je <u>akumulovaná energie podstatně větší</u> než energie dodávaná kmitu během jednoho cyklu.**
- **každý oscilátor je plně charakterizován vlastní frekvencí a činitelem jakosti a to bez ohledu na to o jaký kmitavý proces jde a jakého charakteru je ztrátový výkon.**

<u>Pro Ω$_R$ = 1:</u>

$$\overline{W}_{\max} = \frac{B^2}{8m\delta^2}$$

$$\Delta_T W = \frac{\pi B^2}{2m\delta_R\omega^2}$$

Rezonance při nízkém tlumení

($\delta \ll \omega$)

- při nízkých hodnotách tlumení lze zanedbat δ a za rezonanci považujeme případ, kdy $\omega = \Omega$, $\delta_R = 0$, $\Omega_{Rr} = 1$

- potom $\boxed{C_{\max} = \dfrac{B}{2\delta m\omega}}$ **a** $\boxed{C_R = \dfrac{1}{2\delta_R} = Q_r}$

- **fázový posuv γ mezi budící silou a nucenými kmity ve stavu rezonance právě -π/2 – viz graf na str. 6**
- **tento fázový posuv zajišťuje, že budící síla působí stále ve smyslu „pohybu“ oscilátoru a koná stále kladnou práci**

<u>Ustálení</u>:

- veškerá práce konaná budící silou se nejprve spotřebuje na přemáhání odporů, kterými se kmity tlumí – roste amplituda kmitů a jejich energie

- poté dosahuje amplituda a přibližně také energie ustálené maximální hodnoty

Odhad rezonančních otáček

upevněných rotačních zařízení a strojů

- **založen na odhadu vlastních frekvencí úchytů a podložek vzhledem k upevněnému stroji**
- ***m* – hmotnost stroje**
- ***k* – tuhost podložky**
- ***x* – deformace podložek a úchytů**
- **fixační zařízení je modelováno jako lineární harmonický oscilátor**

Odhad frekvence vlastních kmitů upínacího zařízení:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{mx}} = \sqrt{\frac{g}{x}}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x}}}$$

Cvičení

1. Mějme elektromotor o hmotnosti *m* = 50 kg, který je umístěn ve středu dřevěného nosníku délky *l* = 2 m a šířky *a* = 15 cm. Jaká musí být tloušťka nosníku aby rezonance nenastala při otáčkách větších než 20 Hz? Zobecněte příklad na libovolnou hmotnost elektromotoru a získanou závislost zobrazte do grafu.
2. Mějme hřídel na které umístěn kolmo talíř o hmotnosti *m* a jehož těžiště je vůči ose hřídele posunuto v radiálním směru o vzdálenost *e*. Odhadněte celkový průhyb hřídele *r* při rotaci hřídele (spojenou s uvedeným diskem) s úhlovou frekvencí Ω.