FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

X.-XI. Elektrické a magnetické vlny

Technická fakulta

Česká zemědělská univerzita v Praze

Literatura ke kapitole 10 a 11

Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3. McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.

Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.

Skudrzyk, E.: Simple and Complex Vibrating Systems. The Pennsylvania State University Press, University Park 1969, 500 s.

Vlny v přenosových vedeních

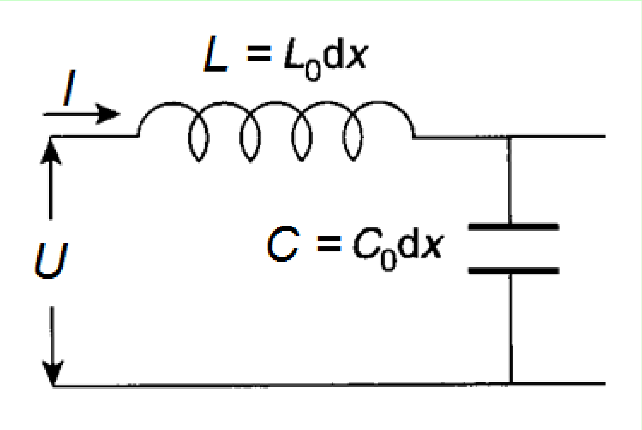
<u>Přenosové vedení: dvojice rovnoběžných vodičů na jejichž jedné straně je zdroj střídavého napětí</u>

- přenosovým vedením se šíří střídavé napětí, které při odběru vyvolává střídavý elektrický proud konající práci

- nositelé elektrického náboje oscilují harmonicky mezi rovnovážnými polohami, ale přitom nedochází k jejich posunu prostředím – prostředím se šíří vlny

- vlastní indukčnost $L = L_0 \mathrm{d}x$ a vlastní kapacita $C = C_0 \mathrm{d}x$

Schéma ideálního přenosového vedení:



$$\text{Platí:} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \qquad (1)$$

Gradient (spád) napětí ve vedení = pokles napětí v důsledku samoindukce na úseku vedení ∂x

Z definice kapacity $C = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}U$ a proudu $\mathrm{d}I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ je gradient proudu (pokles v důsledku nabíjení C):

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C_0 \frac{\partial U}{\partial t} \qquad (2)$$ **- rozepsat**

Vlnové rovnice v přenosových vedeních

Z porovnání (1) a (2) vyplývají vlnové rovnice pro napětí a proud - odvodit:

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}}$$

- z porovnání s obecným tvarem vlnové rovnice:

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{L_0 C_0} \to c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}}$$ **- rychlost šíření vlny přenosovým vedením**

- **často používané přenosové vedení: koaxiální kabel – trubička dielektrika – v jejím středu 1. vodič; 2. vodič vytváří obalovou vrstvu**

- **pro koaxiální kabel je** $L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$ a $C_0 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$ **, kde r_2 a r_1 jsou vnější a vnitřní poloměr dielektrika**

- **potom** $c^2 = \frac{1}{L_0 C_0} = \frac{1}{\mu\varepsilon}$

Vlnové rovnice v přenosových vedeních

- **přenosová rychlost signálu v koaxiálním kabelu je dána rychlostí světla v dielektriku:** $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

- **je-li dielektrikem vakuum, potom je přenosová rychlost signálu:** $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

kde $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} a $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} a potom $c = 3.10^{8}$ m/s

Charakteristická impedance bezztrátového přenosového vedení Z_0:

$$Z_0 = \frac{U_+}{I_+} = cL_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad \text{a} \quad -Z_0 = \frac{U_-}{I_-} = -cL_0 = -\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

kde c je rychlost šíření signálu a symboly + a – značí směr šíření signálu

- šíří-li se vlny oběma směry, je $U = U_+ + U_- \quad \text{a} \quad I = I_+ + I_-$

Ve vakuu je $\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}7 \quad \Omega}$

Odraz vln v přenosových vedeních

- **předpoklad: přenosové vedení s charakteristickou impedancí Z_0 je ukončeno impedancí Z_L**

- **pak vlna v kladném směru (U_+, I_+) se na impedanci Z_L odráží a dává vzniknout vlně v opačném směru (U_-, I_-), která u impedance Z_L musí splňovat podmínky: $U_+ + U_- = U_L$ a $I_+ + I_- = I_L$**

- **definice pojmů spojujících dopadající a odraženou vlnu:**
- **<u>napěťový koeficient odrazu R_U</u> a <u>proudový koeficient odrazu R_I</u>:**

$$\boxed{R_U = \frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

$$\boxed{R_I = \frac{I_-}{I_+} = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}}$$

$$\boxed{R_U = -R_I}$$

- existuje formální shoda koeficientu odrazu z oblasti akustiky a proudového koeficientu odrazu R_I.

Odraz vln v přenosových vedeních

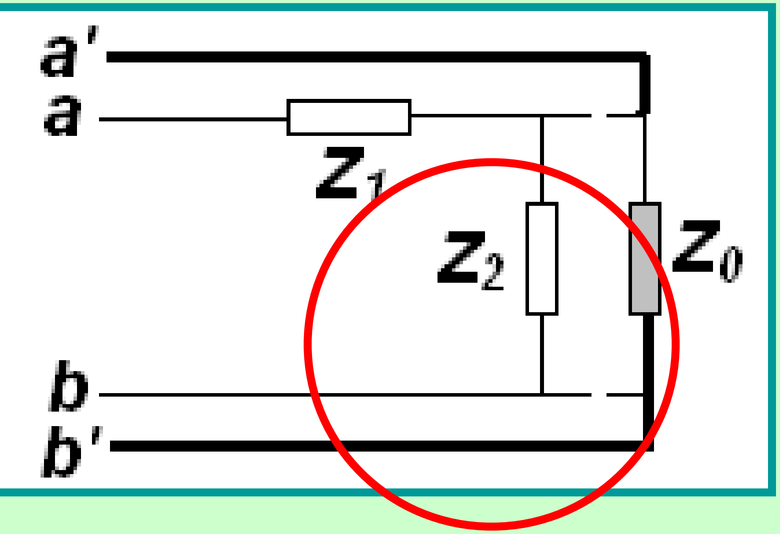
(speciální případy)

- **když $Z_L = Z_0$, vlna vedením pokračuje do nekonečna a neexistuje žádná odražená vlna**

- **když vedení končí zkratem, tj. $Z_L = 0$, platí: $R_U = -1$ a dochází k totálnímu odrazu s fázovým posuvem π. Původní a odražená vlna se skládají tak jak tomu bylo v případě akustických vln a vytváří na vedení stojaté vlny**

- **základní rozdíl mezi akustickými a elektrickými vlnami ve vedení spočívá v tom, že pro popis elektrických vln se používají paralelně dvě veličiny: napětí a proud s dvěma různými koeficienty odrazu R_U a R_I**
  - to se projeví tím, že při stejném fázovém posuvu π je v místě zkratu uzel napěťové vlny a kmitna proudové vlny

Přenosové vedení jako frekvenční filtr



- vlna pohybující se vedením má charakteristickou impedanci Z_0 (a´, b´)

- schéma reálného přenosového vedení s impedancemi: nahrazení induktance L_0 impedancí Z_1 a kapacitance C_0 impedancí Z_2

- přenosové vedení: nekonečná řada elementárních jednotek s impedancemi Z_1 a Z_2

- přidání další jednotky (Z_1 a Z_2) se neprojeví změnou Z_0

- pro impedanci Z zapojení a a b platí:

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0} = Z_0$$ - stejná impedance Z_0 jako pro původní zapojení a´ a b´

- je tedy: $Z_0 = \frac{Z_1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{Z_2}{Z_1}}\right)$ - odvodit

- definujeme činitel šíření signálu: $\boxed{\alpha = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0}}$

- nulové (žádné) tlumení signálu pro $\alpha = 1$

- nenulové tlumení signálu pro $\alpha < 1$

Přenosové vedení jako frekvenční filtr

Když Z_1 a Z_2 mají plně ohmický charakter (jsou to reálná čísla), <u>činitel šíření signálu α je konstantní</u> a tlumení je konstantní pro všechny napěťové vstupy.

Mají-li Z_1 a Z_2 neohmický charakter, tj. $Z_1 = i\omega L$, $Z_2 = 1/(i\omega C)$ pro vstupní napětí $U = U_0 e^{i\omega t}$, pak nulové tlumení (podmínka $\alpha = 1$) nastává pro $0 \le \omega^2 LC \le 4$ a přenosové vedení se stává <u>nízkofrekvenčním filtrem</u> při frekvencích pod mezní hodnotu:

$$\omega_C = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

- nad touto frekvencí dochází k progresivnímu poklesu amplitudy

Pokud zaměníme Z_1 a Z_2, lze psát:

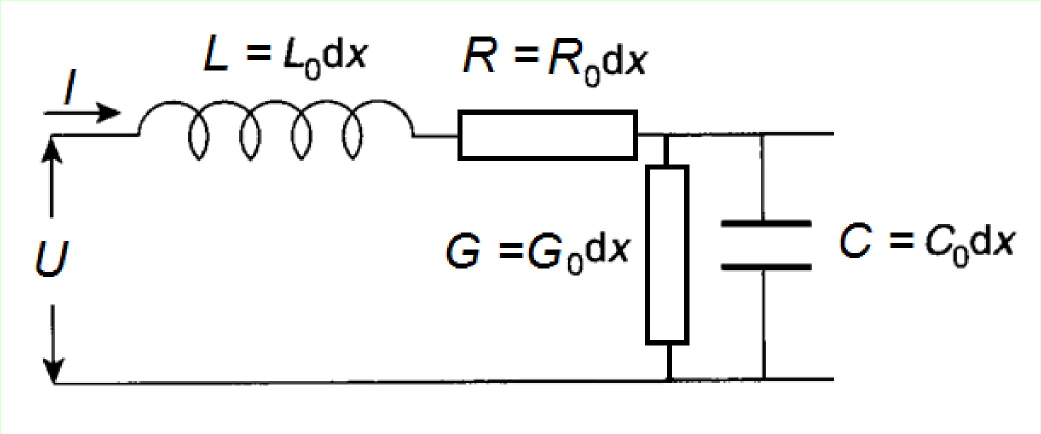
$Z_2 = i\omega L$, $Z_1 = 1/(i\omega C)$, pro vstupní napětí $U = U_0 e^{i\omega t}$ a nulové tlumení nastává pro

$$0 \le \frac{1}{\omega^2 LC} \le 4$$

a tedy přenosové vedení se stává <u>vysokofrekvenčním filtrem</u> při frekvencích nad mezní hodnotu:

$$\omega_C = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

Odpory v přenosovém vedení



- schéma reálného přenosového vedení

R – sériový odpor
G – příčná vodivost

- v ideálním přenosovém vedení je pouze induktance a kapacitance, proto nedochází k disipaci energie (přeměně části energie na jinou formu – např. teplo)
- v reálném přenosovém vedení existuje odporová složka – dochází zde vždy k disipaci energie

$$I = I_0 e^{-i\omega t}; \quad U = U_0 e^{-i\omega t}$$

$$L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = -i\omega L_0 I; \quad C_0 \frac{\partial U}{\partial t} = -i\omega C_0 U$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} + R_0 I = (R_0 + i\omega L_0) I$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t} + G_0 U = (G_0 + i\omega C_0) U$$

Odpory v přenosovém vedení

Po zderivování předchozích rovnic podle *x* je - odvodit:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (R_0 + i\omega L_0)\frac{\partial I}{\partial x} = (R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)U = \gamma^2 U$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = (G_0 + i\omega C_0)\frac{\partial U}{\partial x} = (R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)I = \gamma^2 I$$

Vlnové rovnice

$\gamma = \alpha + ik_\lambda$ **,** γ **- míra přenosu,** α **- tlumení (absorpční koeficient),** k_λ **- vlnočet**

Obecné řešení pro napětí:

$$\boxed{U = Ae^{-\alpha x}e^{i(\omega t - k_\lambda x)} + Be^{\alpha x}e^{i(\omega t + k_\lambda x)}}$$

kde *A* a *B* jsou integrační konstanty

Řešení představuje dvě vlny:

1. **vlna - s konstantou *A* - původní postupná vlna, tlumená**
2. **vlna - s konstantou *B* - odražená vlna, postupuje v opačném směru než původní vlna**

- analogická rovnice platí i pro proud

Charakteristická impedance vedení s odporem

Vztah mezi napětím a odporem:

$$U = U_{+} + U_{-} = \sqrt{\frac{(R_0 + i\omega L_0)}{(G_0 + i\omega C_0)}}(I_{+} + I_{-}), \quad \text{kde}$$

$$\sqrt{\frac{(R_0 + i\omega L_0)}{(G_0 + i\omega C_0)}} = Z_0' = \frac{U_{+}}{I_{+}} = -\frac{U_{-}}{I_{-}}$$

Z_0´ - charakteristická impedance přenosového vedení s odporem

Uvedený vztah ukazuje dvě základní vlastnosti přenosového vedení s ohmickým odporem:

- přítomnost R_0 a G_0 ve vztahu ukazuje na disipaci energie prostřednictví Jouleova tepla

- charakteristická impedance je závislá na frekvenci vlny

Cvičení

1. **Vypočtěte impedanci koaxiálního kabelu s poloměry r_1 = 1 mm a r_2 = 4 mm s vloženým dielektrikem o relativní permitivitě 16.**
   $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} a $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

1. **Vypočtěte napěťový a proudový koeficient odrazu pro koaxiální kabel z příkladu 1 na přechodu v koaxiální kabel stejných rozměrů, ale s dielektrikem o relativní permitivitě 4.**

2. **Vypočtěte mezní frekvenci přenosového vedení s měrnou vlastní indukcí 6.10^{-8} H/m a měrnou vlastní kapacitou 1 nF/m.**

Základní vlastnosti elektromagnetických vln

- vlny v látkách - umožněny setrvačností a pružností látky
- setrvačnost – dána hmotnou podstatou látky (vyjádřena např. hustotou)
- pružnost – dána vazebnými silami (vyjádřeny moduly pružnosti látky)
- pokud šíření signálu nedoprovází žádné disipativní procesy, vlna je vždy harmonická, netlumená; jinak dochází k útlumu

Podobnost mezi mechanickými a elektromagnetickými vlnami:
- magnetické pole v látce přejímá funkci <u>setrvačných </u>účinků
- elektrické pole přejímá funkci zdroje <u>elasticity</u>

- setrvačné účinky elmg. pole popisuje permeabilita prostředí μ
- elastické vlastnosti elmg. pole popisuje permitivita prostředí ε

- elmg. vlna (na rozdíl od vlny mechanické) se může šířit i ve vakuu (vakuum má magnetické a dielektrické vlastnosti)

Základní vlastnosti elektromagnetických vln

- **v absolutně <u>nevodivém</u> prostředí je elmg. vlna harmonická, netlumená (nedoprovázejí ji zde žádné disipativní procesy)**
- **nenulová elektrická vodivost σ – zdroj vlastního tlumení elmg. vln – tlumení roste s růstem vodivosti**
- **teorie elmg. pole, tj. i elmg. vln popisují 4 Maxwellovy rovnice – 2 časově závislé, 2 časově nezávislé**
- **el. vodivost prostředí $\sigma = 0$ – v M.R. pouze tzv. posuvný proud, nedochází ke ztrátám energie a tlumení elmg. vln**
  Pozn.: Posuvný proud vzniká při polarizaci dielektrika – po vložení dielektrika do el. pole dojde k posunu (natočení) el. nábojů v látce
- **el. vodivost prostředí $\sigma \neq 0$ – vlnové rovnice nutno modifikovat a zahrnout do nich exponenciální pokles intenzity el. pole s rostoucí vzdáleností od zdroje**

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými ε a μ a nulovou σ – netlumené vlnění

Maxwellovy rovnice – popisují podstatu elmg. jevů

Časově závislé M.R.:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{i} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k} \quad (1)$$

Časová změna magnetické indukce vytváří elektrické pole.

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \mu\varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t}\vec{k}\right) \quad (2)$$

↓

pouze posuvný proud,
vodivostní proud není přítomen

Elektrický proud a časová změna elektrické intenzity vytvářejí magnetické pole.

- časově závislé M.R. spojují časovou derivaci mg. indukce s prostorovou derivací intenzity el. pole a časovou derivaci intenzity el. pole s prostorovou derivací mg. indukce

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými *ε* a *μ* a nulovou *σ* – netlumené vlnění

Časově nezávislé M.R.:

hustota elektrického náboje

↑

$$\operatorname{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (3)$$

Elektrický tok uzavřenou plochou je úměrný uzavřenému náboji.

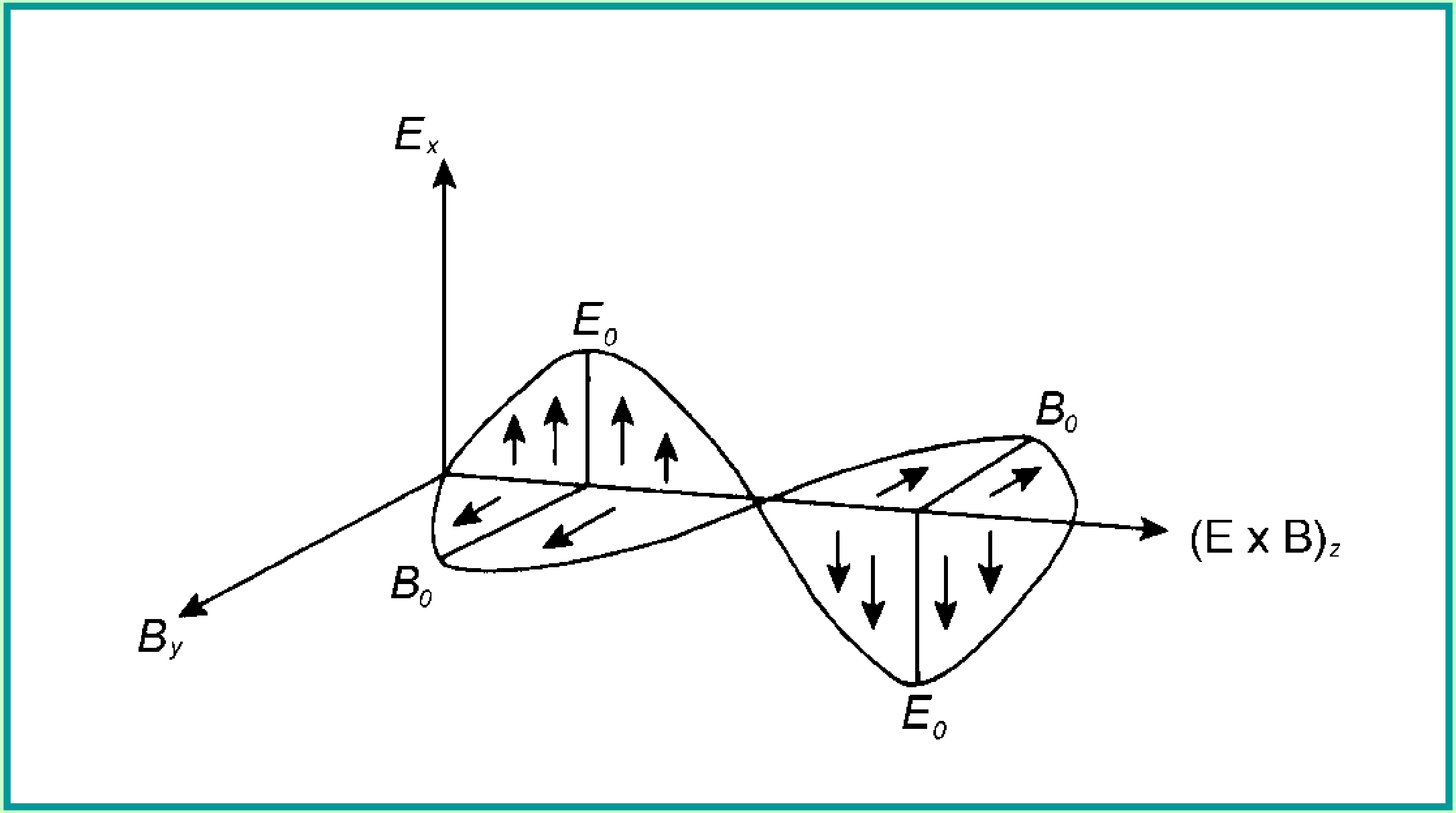
$$\operatorname{div}\vec{B} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = 0 \qquad (4)$$

Magnetický tok uzavřenou plochou je nulový.

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými ε a μ a nulovou σ – netlumené vlnění

- dále předp. pouze rovinně polarizovanou vlnu, která se šíří ve směru osy *z*
- elmg. vlnění je příčné – vektory ***E*** a ***B*** kmitají kolmo na směr šíření vlny



Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými *ε* a *μ* a nulovou *σ* – netlumené vlnění

- nenulové jsou pouze složky E_x a B_y, proto z 1. a 2. M.R. plyne :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \text{a} \quad -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Z porovnání obou rovnic vyplývají vlnové rovnice pro elmg. vlnění - odvodit:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}}$$

Platí: $v^2 = 1/\mu\varepsilon$, kde rychlost šíření vlnění *v* je fázová rychlost světla v daném prostředí

- pro vakuum je $c^2 = 1 / \mu_0\varepsilon_0 \Rightarrow c = 3.10^8$ m/s

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými *ε* a *μ* a nulovou *σ* – netlumené vlnění

- řešením vlnových rovnic jsou funkce postupných příčných vln pro příslušné složky intenzity elektrického pole a magnetické indukce:

$$E_x = E_0 \sin(\omega t - k_\lambda z) = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - z)\right]$$

$$B_y = B_0 \sin(\omega t - k_\lambda z) = B_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - z)\right]$$

- směr šíření vlny je dán směrem Poyntingova vektoru $\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B}, \quad [S] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

- vlna s sebou nese energii s průměrným výkonem na jednotku plochy:

$$S = \frac{1}{2\mu} E_0 B_0$$

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými ε a μ a nulovou σ – netlumené vlnění

Řešení vlnových rovnic dosadíme do 1. M.R.:

$$E_x = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - z)\right]$$

$$B_y = B_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - z)\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$ **- odtud plyne – odvodit:**

$$-vB_y = -E_x = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} B_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_y$$

Charakteristická impedance prostředí: $$\boxed{\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{E_0}{H_0} = Z}$$

Pro vakuum: $$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}7 \quad \Omega$$

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými ε a μ a nulovou σ – netlumené vlnění

Hustotu energie elektromagnetické vlny *w*, tj. energii v jednotkovém objemu prostředí, vypočteme jako součet hustot energií elektrické a magnetické složky:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E_x^2 + \frac{1}{2\mu}B_y^2$$

pro sinusoidální vlny má průměrnou hodnotu:

$$\boxed{\overline{w} = \frac{1}{4}\varepsilon E_0^2 + \frac{1}{4\mu}B_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2}$$

Výkon elektromagnetických vln prošlých jednotkovou plochou se nazývá intenzita vlnění *I*:

$$\boxed{I = \overline{w}v = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2 = \frac{1}{2\mu}vB_0^2}$$

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými *ε* a *μ* a *σ* – tlumené vlnění

- v reálném prostředí existuje reálný el. proud: *J* = *I*/*S* = *σE* (Ohmův zákon)

(Proudová hustota = Vodivost prostředí . Intenzita el. pole)

- přítomnost reálného el. proudu → nutnost modifikovat (doplnit) uvedené rovnice

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\sigma E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (1)$$

- přítomnost odporového členu $\mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t}$ je spojena s dissipací energie difusního charakteru

- 1/(*μσ*) magnetická difusivita

- dosazení funkce popisující harmonické vlny $E_x = E_0 e^{i\omega t}$ do rovnice (1) potom je:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0 \quad (1')$$ **- odvodit, kde** $\gamma^2 = i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$

- řešení rovnice (1´) je ve tvaru $\boxed{E_x = E_0 e^{i\omega t} e^{\pm\gamma z} \quad (2)}$

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými *ε* a *μ* a *σ* – tlumené vlnění

- konkrétní řešení rov. (1´) závisí na vzájemném poměru reálného a posuvného proudu v daném prostředí $\sigma/\omega\varepsilon$

<u>Pro vodič:</u> $\sigma >> \omega\varepsilon$, takže $\gamma^2 \approx i\sigma\omega\mu$ a tedy $\gamma \approx (1 + i)(\sigma\omega\mu/2)^{1/2}$ a rovnice (2) dává:

$$\boxed{E_x \approx E_0 e^{\pm\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z} e^{i\left(\omega t \pm \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right)} \qquad (3)}$$

- pro <u>kladný směr</u> osy z je v exponentu znaménko „-“, což popisuje <u>pokles</u> hodnoty E_x s faktorem $\exp[-(\omega\mu\sigma)^{1/2}z]$

Nebo-li: po průchodu elektromagnetické vlny vodičem o tloušťce $\delta = [2/(\omega\mu\sigma)]^{1/2}$ poklesne intenzita elektrického pole vlny na hodnotu e-krát menší než byla intenzita elektrického pole dopadající vlny

- vzdálenost <u>δ - hloubka vniknutí</u>
Pro měď s hodnotami $\mu = \mu_0$ a $\sigma = 5{,}9.10^7$ S.m^{-1} je hloubka vniknutí:
8,5 mm (60 Hz)
66 μm (1 MHz)
0,38 μm (30 GHz)

Elektromagnetické vlny

v prostředí s nenulovými ε a μ a σ – tlumené vlnění

- fázová rychlost elektromagnetických vln s použitím úhlového vlnočtu k_λ a vlnové délky λ:

$$v = \frac{\omega}{k_\lambda} = \omega\delta = \frac{\omega}{2\pi}\lambda = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

kde

$$k_\lambda = \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}} - \text{viz (3)} \quad \text{a} \quad \lambda = 2\pi\delta = \frac{2\pi}{k_\lambda} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

- fázová rychlost vlny je dána také výrazem $v = 1/(\mu\varepsilon)^{1/2}$

Celkový proud v reálné látce:

$I = \omega.\varepsilon.E$ (posuvný proud) + $\sigma.E$ (reálný - vodivostní proud)

- médium se smíšenými elektrickými vlastnostmi se posuzuje podle poměru elektrických konduktivit vodivostního a posuvného proudu $\sigma/\omega\varepsilon$

Elektromagnetické vlny

(rozdíl mezi vodičem a dielektrikem)

$\sigma/\omega\varepsilon > 100$ – **látka se chová jako vodič**

$\sigma/\omega\varepsilon < 0{,}01$ – **látka se chová jako dielektrikum**

- mezi tím <u>kvazi-vodiče</u> – látky s nevyhraněnými elektrickými vlastnostmi - k nim patří některé polovodiče

<u>- čím je použitá frekvence vyšší, tím se látka chová méně jako vodič</u>

<u>Př.:</u>

Pro měď je poměr $\sigma/\omega\varepsilon \approx 10^{18}/f \Rightarrow$ **až do frekvencí** 10^{16} **Hz se měď chová jako vodič**

- pro frekvence od $f = 10^{20}$ **Hz výše je poměr** $\sigma/\omega\varepsilon < 0{,}01$ **a měď se chová jako dielektrikum**

- typický izolátor: $\sigma \approx 10^{-15}$ **S.m**$^{-1}$**,** $\varepsilon \approx 10^{-11}$ **F.m**$^{-1}$**,** $\sigma/(\omega\varepsilon) \approx 10^{-4}/\omega \Rightarrow$ **elektrický proud je v něm zanedbatelný při všech frekvencích**

Impedance elektromagnetických vln

- impedance v prostředí beze ztrát je reálná veličina
- platí to pro přenosové vedení a dielektrikum s tím, že E_x a B_y jsou ve fázi
- pro přenosové vedení se ztrátami je impedance definována jako komplexní veličina

Elektromagnetické pole ve vodičích je popsány rovnicemi:

$$E_x = E_0 e^{i\omega t} e^{\pm\gamma z} \text{ a } B_y = B_0 e^{i(\omega t - \varphi)} e^{\pm\gamma z}, \text{ kde } \gamma = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

- magnetická indukce se opožďuje za intenzitou elektrického pole o fázový úhel φ

- impedance vodiče: $Z_c = \mu \dfrac{E_x}{B_y} = \mu \dfrac{E_0}{B_0} e^{i\varphi}$

- platí: $\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t}$, tj. $-\gamma E_x = -i\omega B_y$ - odvodit

- potom impedance vodiče: $Z_c = \mu \dfrac{E_x}{B_y} = \dfrac{i\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\sigma}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\sigma}} e^{i\varphi}$ - odvodit

Impedance elektromagnetických vln

- výsledkem vektor o velikosti ($\omega/\mu\sigma$)$^{1/2}$ a s fázovým úhlem φ = 45^{o} reprezentujícím zpoždění B_y oproti E_x

- výsledek lze také vyjádřit ve tvaru:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + i\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

- velikost impedance v dielektriku: $Z = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$

- velikost impedance ve vodiči: $Z_c = (\omega\mu/\sigma)^{1/2}$

Rozhraní dvou prostředí

(základní definice)

- dvě prostředí o impedancích Z_1 a Z_2 oddělené společným rozhraním. Elektromagnetická vlna kolmá k rozhraní má tři složky: dopadající (i), odraženou (r), a prošlou (t)

- zavedeme příslušné složky intenzity magnetického pole:
$H_i = B_i/\mu_1$, $H_r = B_r/\mu_1$, $H_t = B_t/\mu_2$, kde μ_1 a μ_2 jsou permeability obou prostředí

- mezi intenzitami elmg. pole a impedancemi platí:

$$\frac{E_i}{H_i} = Z_1; \quad \frac{E_r}{H_r} = -Z_1; \quad \frac{E_t}{H_t} = Z_2$$

Rozhraní dvou prostředí

(odraz a průchod)

Zavádíme amplitudový koeficient odrazu *R* a amplitudový transmisní koeficient *T*:

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- pro ideální vodič $Z_2 = 0$ dostáváme úplný odraz a tedy $R = -1$ a $T = 0$

Rozhraní dvou prostředí

(index lomu)

- v případě, že prostředí „1“ je vakuum, definujeme absolutní index lomu *n* prostředí „2“ ve tvaru:

$$\boxed{n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1-R}{1+R}}$$

kde $v_1 = c$ je rychlost světla ve vakuu a v_2 rychlost světla v prostředí „2“ – známá definice absolutního indexu lomu $n = c/v$

- v případě, že prostředí „2“ je dielektrikum, definujeme index lomu prostřednictvím jeho „elektromagnetických“ vlastností:

$$\boxed{n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}}$$

Rozhraní dvou prostředí

(index lomu)

- v případě, že prostředí „2“ je vodivé:

$$\boxed{n = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\beta}{\alpha + i\alpha}, \ \text{kde } \beta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \text{ a } \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}}$$

- index lomu je komplexní číslo

$$\boxed{R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\alpha + i\alpha - \beta}{\alpha + i\alpha + \beta} = \frac{1 - \beta/\alpha + i}{1 + \beta/\alpha + i}}$$

- amplitudový koeficient odrazu je komplexní číslo

$$\boxed{I_r = \frac{E_r^2}{E_i^2} = R^2}$$

- relativní intenzita odražených vln z amplitudového koeficientu odrazu

Cvičení

1. Odhadněte koeficient odrazu a podíl intenzity odražených elektromagnetických vln na rovinném rozhraní dvou nevodivých optických prostředí. Numericky aplikujte na průchod viditelného světla rozhraním vzduch-sklo.

2. Odvoďte rovnici odražené vlny od destičky o jisté stálé tloušťce *L*.

3. Na základě výsledků předchozího cvičení určete podmínky za nichž nedochází k odrazu světla na destičce.