FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

II. Periodické děje a periodicita

Technická fakulta
Česká zemědělská univerzita v Praze

Literatura ke kapitole 2

Brdička, M., Hladík, A.: Teoretická mechanika. Academia, Praha 1987, 581 s.

Halliday, D.,Resnick, R., Walker, J.: Fyzika. Část 1. Mechanika. VUTIUM/PROMETHEUS, Praha 2000, s. 1-328.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.

Kufner, A., Kadlec, J.: Fourierovy řady. Academia, Praha 1969, 346 s.

Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.

http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number, staženo 26.01.2011.

Sluneční skvrny (1750-2000)

http://us.geocities.com/straitssalish/Climate_Atlas/text/sunspot_monthly_1750_2000.txt, staženo 8.10.2009

Periodický děj

- Děj, který se pravidelně opakuje vždy po stejné době – tzv. periodě

- Pro libovolnou fyzikální veličinu $X(t)$ popisující periodický děj musí platit:

$$\boxed{X(t) = X(t + nT)}$$

- perioda ***T***, frekvence ***f = 1/T***

- úhlová frekvence $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\pi f}$

- Periodické děje jsou základem pro měření času

- V nejstarším období šlo o periodicitu v nebeských pozorováních spočívajících v pohybu Slunce a Měsíce po obloze – vznik dne, měsíce a roku

Periodicita Sluneční soustavy

Délka dnů a roků na planetách Sluneční soustavy

Planeta	Délka dne v násobcích pozemského dne	Délka roku v násobcích pozemského roku
Merkur	58,6	0,241
Venuše	243	0,615
Mars	1,03	1,881
Jupiter	0,249	11,87
Saturn	0,425	29,45
Uran	0,746	84,07
Neptun	0,795	164,9

Periodicita Sluneční soustavy

Příklad

Odhadněte poloměr planetárního orbitu jako násobek orbitu Země

- Keplerovy zákony

$$F_G = F_D$$

$$Tv = 2\pi r = T\sqrt{\frac{\kappa M_S}{r}}$$

$$KT = r^{\frac{3}{2}}$$

$$r / r_Z = (T / T_Z)^{\frac{2}{3}}$$

Planeta	Délka roku v násobcích pozemského roku	Vzdálenost od Slunce v násobcích vzdálenosti Země
Merkur	0,241	?
Venuše	0,615	?
Mars	1,881	?
Jupiter	11,87	?
Saturn	29,45	?
Uran	84,07	?
Neptun	164,9	?

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{r}}$$

$$\kappa \frac{m M_S}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

$$F_G = F_D$$

$$Tv = 2\pi r = T\sqrt{\frac{\kappa M_S}{r}}$$

$$KT = r^{\frac{3}{2}}$$

$$K T_Z = r_Z^{3/2}$$

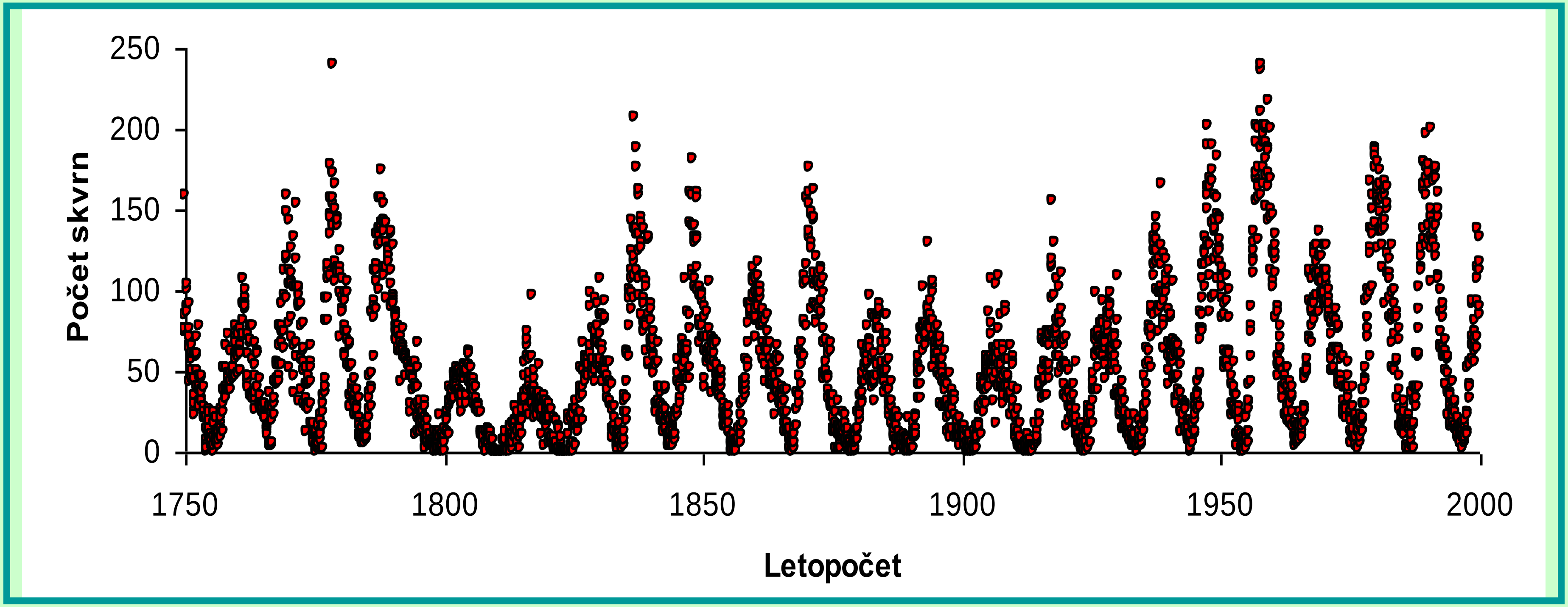
$$r / r_Z = (T / T_Z)^{\frac{2}{3}}$$

Periodicita Sluneční činnosti

Sluneční skvrny – oblasti s menší povrchovou teplotou než okolí

- složitější periodický děj

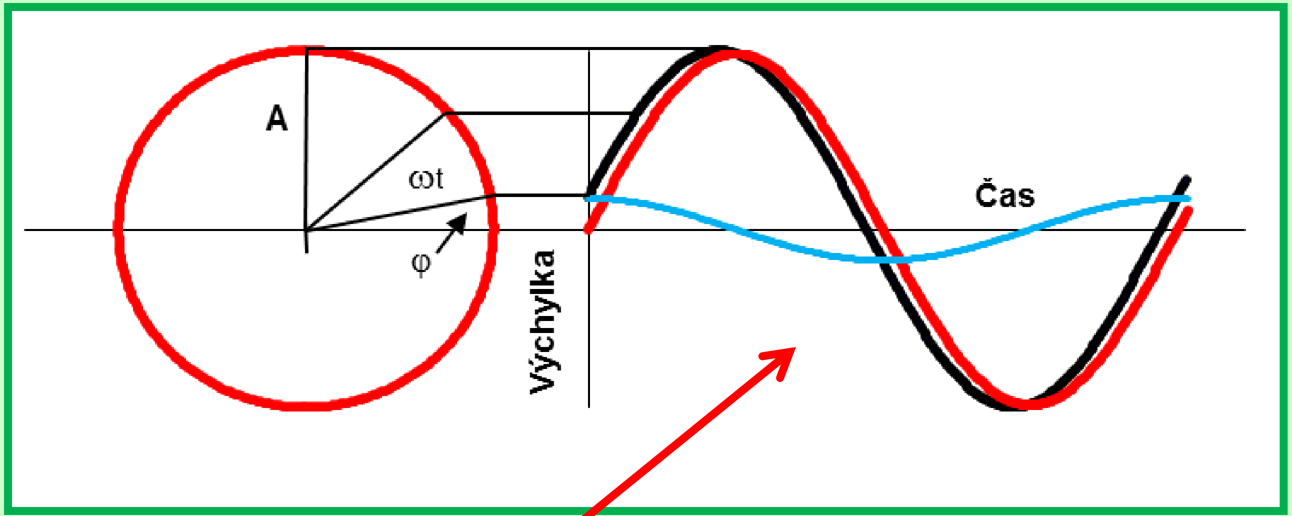
- popsaný 11letým cyklem



Harmonický děj

- harmonický děj je periodický děj popsaný harmonickou funkcí, tj. sinus resp. kosinus

- k popisu harmonického pohybu lze výhodně využít časový rozvoj kruhového pohybu



***ω* – konst.**

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) = x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t$$

x_0, y_0 souřadnice počátečního bodu

$$A = \sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}$$

Zápis s komplexními čísly

- alternativní popis harmonického děje

$$\hat{x}(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + iA\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\mathrm{Re}\left(\hat{x}(t)\right) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\mathrm{Im}(\hat{x}(t)) = A\sin(\omega t+\varphi)$$

- *y*-ovou složku potom vyjádříme:

$$y(t) = \mathrm{Im}\,\hat{x}(t) = \mathrm{Im}\{Ae^{i(\omega t+\varphi)}\} = A\sin(\omega t+\varphi)$$

Komplexní čísla I

Definice

Komplexní číslo: $\hat{z} = x + iy$

Reálná a imaginární část: $x = \mathrm{Re}\,\hat{z}, \quad y = \mathrm{Im}\,\hat{z}$

Rovnost: $\hat{z}_1 = \hat{z}_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2, y_1 = y_2$

Absolutní hodnota: $|\hat{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

Komplexně sdružené číslo: $\bar{z} = x - iy$

Opačné KČ: $-\hat{z} = -x - iy$

Součet: $\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Rozdíl obdobně jako součet

Zákony pro sčítání: *komutativní* $\hat{z}_1 + \hat{z}_2 = \hat{z}_2 + \hat{z}_1$

asociativní $\hat{z}_1 + (\hat{z}_2 + \hat{z}_3) = (\hat{z}_1 + \hat{z}_2) + \hat{z}_3$

Komplexní čísla II

Násobení

Součin čísel: $\hat{z}_1 = x_1 + iy_1 \quad a \quad \hat{z}_2 = x_2 + iy_2$

Definice: $\hat{z} = \hat{z}_1 \hat{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Zákony: *komutativní* $\hat{z}_1 \hat{z}_2 = \hat{z}_2 \hat{z}_1$

asociativní $\hat{z}_1(\hat{z}_2 \hat{z}_3) = (\hat{z}_1 \hat{z}_2)\hat{z}_3$

distributivní $(\hat{z}_1 + \hat{z}_2)\hat{z}_3 = \hat{z}_1 \hat{z}_3 + \hat{z}_2 \hat{z}_3$

Pokud $\hat{z}_1 = \hat{z}_2 = i$, potom pro imaginární jednotku platí:

$$i^2 = i.i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0.0 - 1.1) + i(0.1 + 0.1) = -1$$

Komplexní čísla III

Dělení

Podíl čísel $$\hat{z}_1 = x_1 + iy_1 \quad a \quad \hat{z}_2 = x_2 + iy_2$$

Definice: $$\hat{z} = \frac{\hat{z}_2}{\hat{z}_1} = \frac{\hat{z}_2\bar{z}_1}{\hat{z}_1\bar{z}_1} = \frac{\hat{z}_2\bar{z}_1}{\left|\hat{z}_1\right|^2} = \frac{x_2x_1 + y_2y_1}{x_1^{\;2} + y_1^{\;2}} + i\,\frac{y_2x_1 - x_2y_1}{x_1^{\;2} + y_1^{\;2}} \qquad \hat{z}_1 \neq 0$$

Převrácené číslo: $$\frac{1}{\hat{z}} = \frac{\bar{z}}{\left|\hat{z}\right|^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\,\frac{x-iy}{\left(x-iy\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

Důsledky: $$\left|\hat{z}\right| = 0 \Leftrightarrow \hat{z} = 0$$

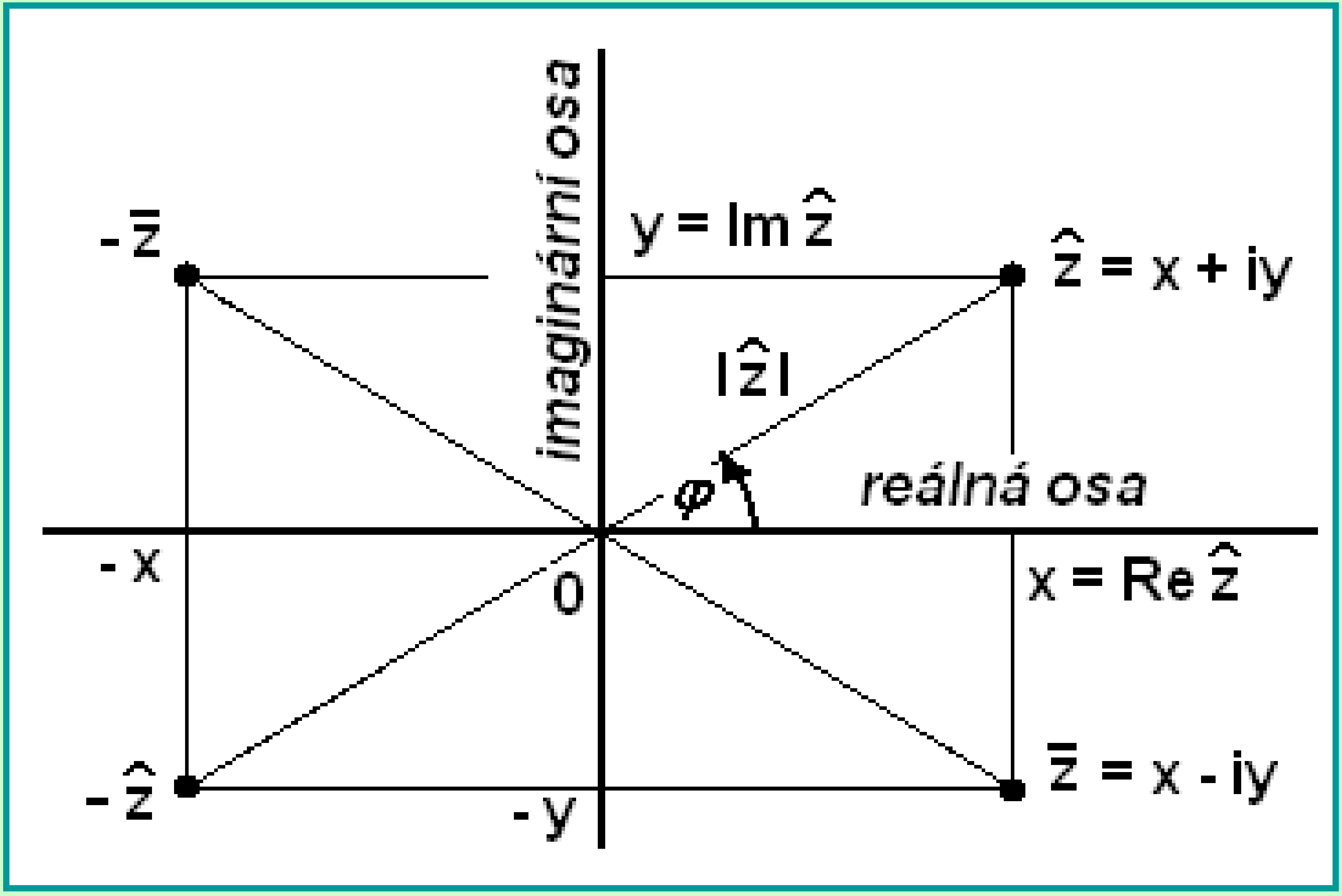
$$\left|\hat{z}_1\hat{z}_2\right| = \left|\hat{z}_1\right|\left|\hat{z}_2\right|$$

$$\left|\hat{z}_1 \pm \hat{z}_2\right| \leq \left|\hat{z}_1\right| + \left|\hat{z}_2\right|$$

$$\left|\hat{z}_1 \pm \hat{z}_2\right| \geq \left|\hat{z}_1\right| - \left|\hat{z}_2\right|$$

Komplexní čísla IV

Gaussova rovina, fáze φ



Komplexní čísla V

Gaussova rovina, fáze φ, trigonometrický a Eulerův zápis

Fáze (argument) KČ $\varphi = \arg(\hat{z})$ je dán:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Hlavní hodnota argumentu $\varphi = Arg(\hat{z})$ je z intervalu (-π, π>.

Trigonometrický zápis: $\hat{z} = x + iy = |\hat{z}|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

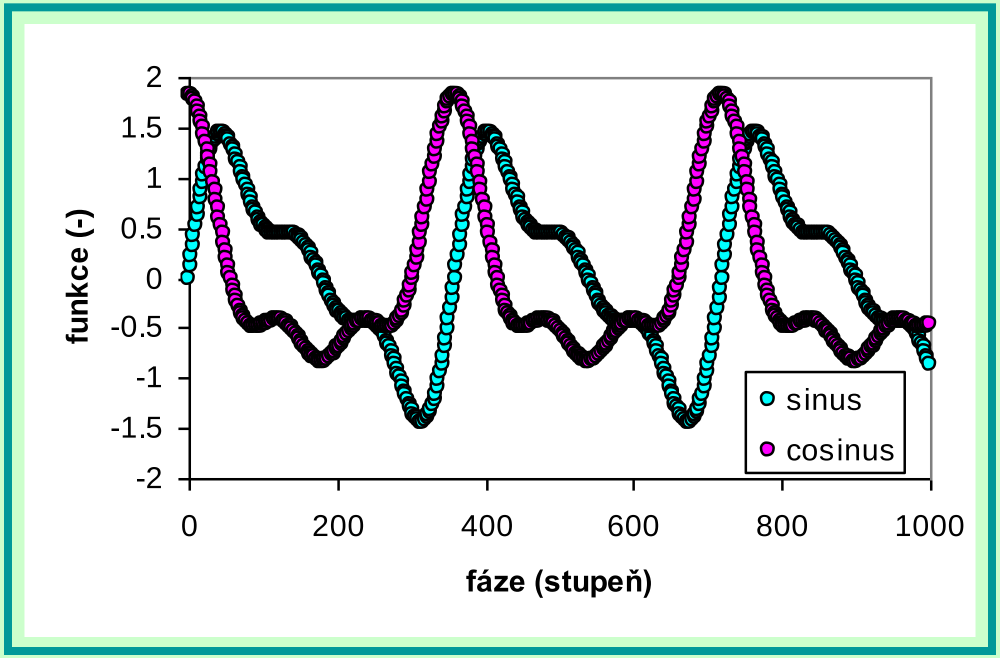
Eulerův zápis: $\hat{z} = |\hat{z}|e^{i\varphi}$

Anharmonicita

- harmonický děj - nejjednodušší a nejdůležitější typ periodického děje

- naprostá většina reálných periodických dějů nejsou ději harmonickými, tj. jsou to děje *anharmonické*

- libovolný, tj. i anharmonický periodický děj lze rozložit na řadu harmonických dějů – to umožňuje harmonická (Fourierova) analýza



$$A_s = \sin(\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\varphi) + \frac{1}{3}\sin(3\varphi)$$

$$A_c = \cos(\varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{3}\cos(3\varphi)$$

Fourierova (harmonická) analýza

Každou periodickou funkci $f(t)$ s periodou T lze rozložit do konvergující nekonečné řady harmonických funkcí:

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right], \quad \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

kde koeficienty Fourierova rozvoje jsou:

$$\boxed{A_0 = \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \qquad B_0 = 0}$$

a pro celá k = 1, 2, 3, ….

$$\boxed{A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t, \qquad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t}$$

- Harmonické funkce v nekonečné řadě mají periody T, $T/2$, $T/3$, … a úhlové frekvence ω, 2ω, 3ω …

- Koeficienty rozvoje A_k a B_k se s rostoucím k obvykle rychle zmenšují - to umožňuje při harmonické analýze pracovat pouze s několika málo složkami

Fourierova transformace

- převádí funkci času $s(t)$ na funkci úhlové frekvence $S(\omega)$:

$$\boxed{F[s(t)] = S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \left|S(\omega)\right| e^{i \arg S(\omega)}}$$

- $S(\omega)$ je spektrum signálu $s(t)$, které se skládá z amplitudového spektra $\left|S(\omega)\right|$ a fázového spektra $\arg S(\omega)$

- klasická Fourierova transformace se používá pro funkce vyjádřené v analytickém tvaru

- pokud ale zpracováváme konkrétní naměřené hodnoty nějakého signálu, používáme diskrétní FT - DFT

Diskrétní Fourierova transformace
(DFT)

- jde o transformaci signálu z časové oblasti do frekvenční oblasti

- tj. vstupem do DFT je diskrétní navzorkovaný signál a výstupem je diskrétní spektrum tohoto signálu – informace o frekvenčních složkách v něm obsažených

- matematicky jde o transformaci mezi posloupnostmi:

$d(k)$, k = 0, ..., N-1 a $D(n)$, n = 0, ..., N-1:

$$D(n) = \sum_{k=0}^{N-1} d(k) e^{-ink2\pi/N} \qquad n = 0, ..., N-1$$

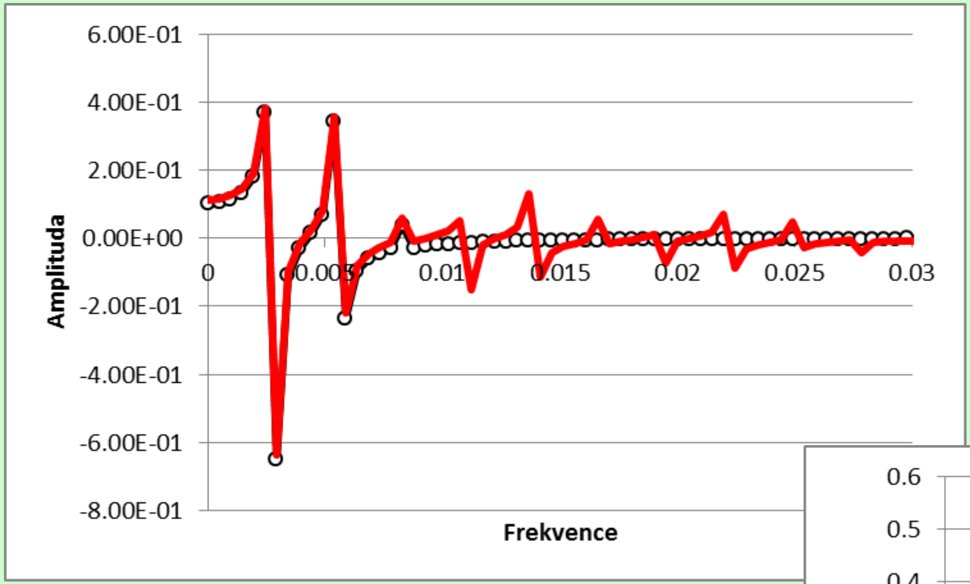
$$d(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D(n) e^{ink2\pi/N} \qquad k = 0, ..., N-1$$

- dnes se využívá zejména tzv. Rychlá Fourierova Transformace (FFT) – speciální algoritmus DFT

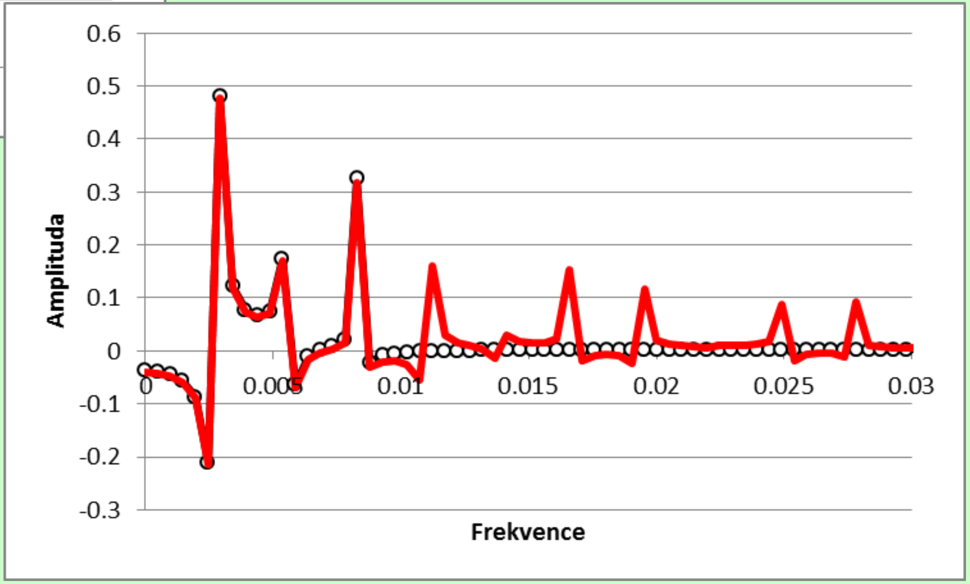
FFT

FFT funkcí uváděných u anharmonicity

Funkce sinus



Funkce cosinus



Cvičení

1. Určete Fourierův rozvoj pilovitých kmitů definovaného v intervalu (-π, π) předpisem $f(t) = t$.
2. S použitím FFT analyzujte průběh sluneční aktivity.
3. Procvičujte dělení a násobení komplexních čísel.
4. Procvičujte trigonometrické vyjádření komplexních čísel.