# FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

## IV. Tlumený jednoduchý harmonický pohyb

Technická fakulta
Česká zemědělská univerzita v Praze

# Literatura ke kapitole 4


Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.

Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.

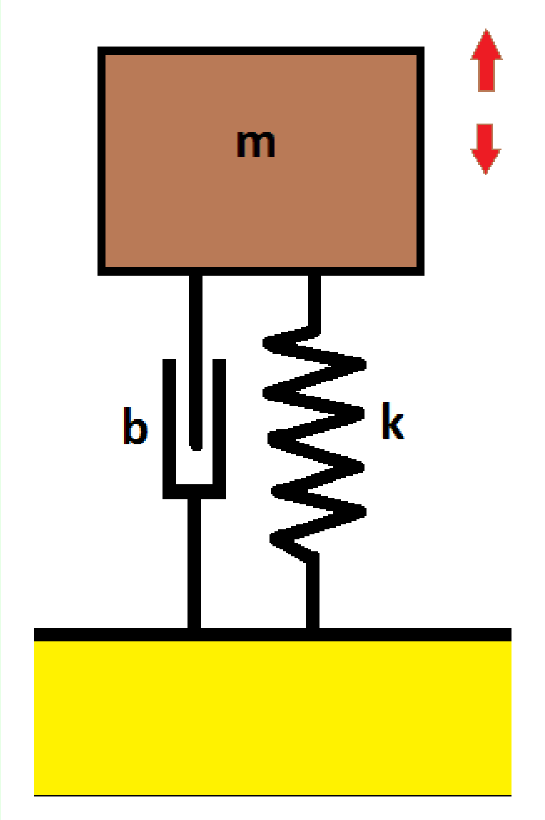
Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.

# Tlumení kmitavých soustav

- v reálných soustavách s disipativními silami je kmitavý pohyb omezen nebo přímo vyloučen
- po vykonání jednoho kmitu se systém nevrátí do původního stavu
- nejde tedy o děj striktně periodický
- pouze u soustav s nízkou hladinou tlumení můžeme děj považovat za kvaziperiodický s tlumením jako „poruchou“
- tlumení je běžný doprovodný jev jakéhokoliv reálného kmitavého pohybu či děje, který je podle potřeby zesilován či potlačován
- častý příklad tlumení kmitů v technických systémech a strojích obecně
- simulace

# Lineární harmonický oscilátor

## Tlumený




- vznikne z lineárního harmonického oscilátoru paralelním přiřazením tlumiče se součinitelem lineárního odporu *b*

- nejjednodušší případ:

brzdící odporová síla je přímo úměrná rychlosti kmitání

# Tlumící síla úměrná rychlosti

$$\vec{F}_b = -b\vec{v}, \quad b \succ 0$$

$F_b$ brzdící (odporová) síla,

$b$ součinitel lineárního odporu

$$m\ddot{x} = F + F_b$$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

pohybová rovnice

***δ dekrement útlumu***

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{b}{2m}$$

**Pohybová rovnice je opět obyčejná lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními parametry a nulovou pravou stranou.**

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

**tvar řešení**

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

**charakteristická rovnice – odvodit rovnici + řešení**

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm D \qquad D^2 = \delta^2 - \omega^2$$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}$$

**obecné řešení: rovnice (1)**

$C_1$, $C_2$ – z počátečních podmínek pohybu

$\lambda_1$, $\lambda_2$ obecně komplexní čísla

**4 případy řešení:**

# I. Zanedbatelný útlum

## $\delta/\omega << 1$

$D^2 \sim -\omega^2$

**tento stav můžeme charakterizovat jako případ téměř netlumených harmonických kmitů**

$$\boxed{\tilde{\omega}^2 = \omega^2 = k/m}$$

**- výsledná úhlová frekvence tlumených kmitů = vlastní úhlové frekvenci oscilátoru**

**Změna frekvence oscilátoru je v tomto případě vyvolána změnami v některé z veličin *k* a *m***

# II. Tlumené periodické kmity

## (0 < δ/ω < 1)

**V tomto případě je *D*² záporné a kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní čísla:**

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

$\tilde{\omega}^2 = \frac{k}{m} - \delta^2$ **je úhlová frekvence tlumených harmonických kmitů, která je menší než úhlová frekvence *ω***

$x(t) = C_1 e^{(-\delta + i\tilde{\omega})t} + C_2 e^{(-\delta - i\tilde{\omega})t}$ **- řešení rovnice (1)**

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 e^{i\tilde{\omega}t} + C_2 e^{-i\tilde{\omega}t}\right] = A e^{-\delta t} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

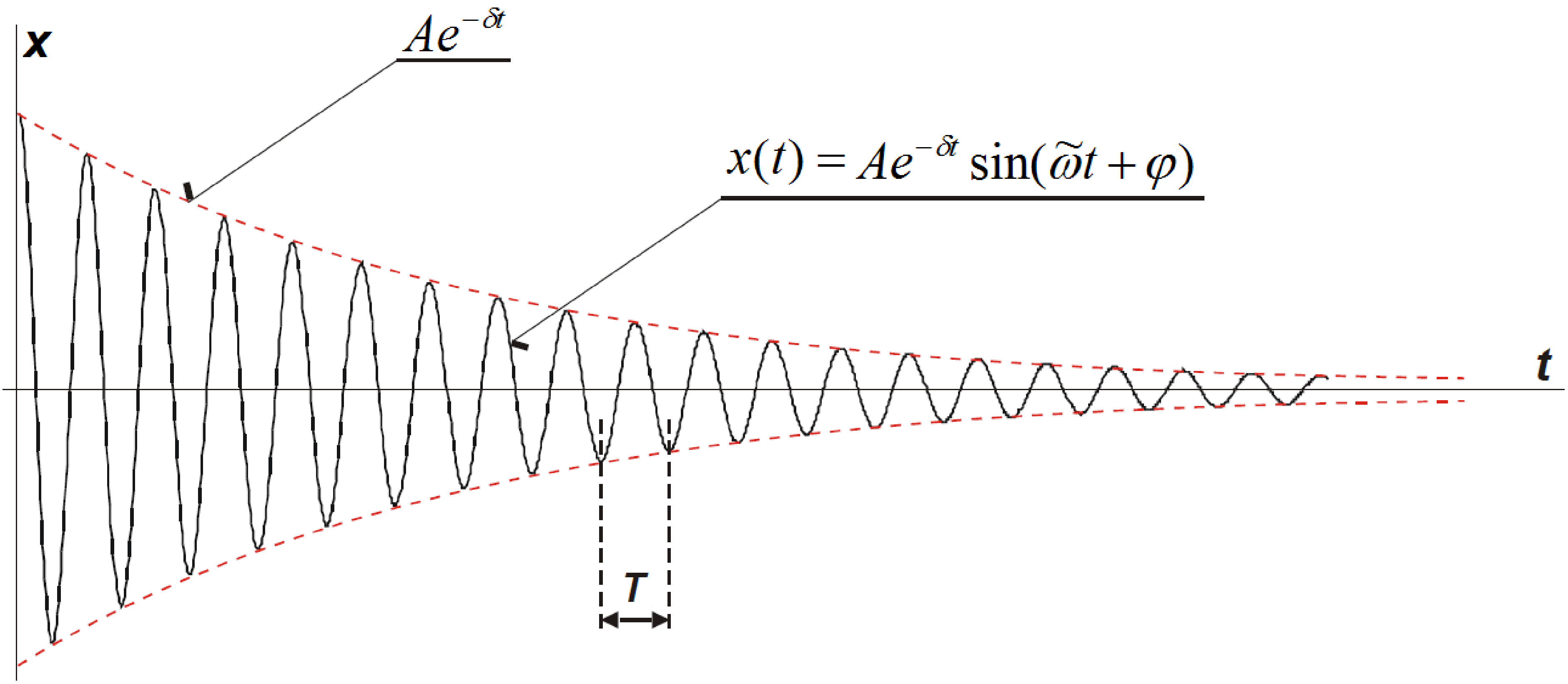
***A***, $\varphi$ **- nové integrační konstanty – určeny z počátečních podmínek**

**<u>Tlumené harmonické kmity</u>**

**- nejde striktně vzato o periodický děj – amplituda kmitů exponenciálně klesá v čase – viz obr.**

# II. Tlumené periodické kmity

(0 < δ/ω < 1)



# Rychlost a zrychlení

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = A\tilde{\omega}e^{-\delta t}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi) - A\delta e^{-\delta t}\sin(\tilde{\omega}t+\varphi) = \\ &= Ae^{-\delta t}\left[\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi) - \delta\sin(\tilde{\omega}t+\varphi)\right] \end{aligned}}$$

simulace

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} = -A\delta e^{-\delta t}\left[\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi) - \delta\sin(\tilde{\omega}t+\varphi)\right] + \\ &+ Ae^{-\delta t}\left[-\tilde{\omega}^2\sin(\tilde{\omega}t+\varphi) - \delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi)\right] = \\ &= Ae^{-\delta t}\left[-\delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi) + \delta^2\sin(\tilde{\omega}t+\varphi) - \tilde{\omega}^2\sin(\tilde{\omega}t+\varphi) - \delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi)\right] = \\ &= Ae^{-\delta t}\sin(\tilde{\omega}t+\varphi)\left[\delta^2 - \tilde{\omega}^2\right] - 2Ae^{-\delta t}\delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi) = \\ &= x(t)[\delta^2 - \tilde{\omega}^2] - 2Ae^{-\delta t}\delta\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi) \end{aligned}}$$

# Útlum

- poměr 2 po sobě následujících maximálních výchylek na stejnou stranu od rovnovážné polohy:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{Ae^{-\delta(t_1+T)}\sin\left[\tilde{\omega}(t_1+T)+\varphi\right]}{Ae^{-\delta t_1}\sin\left[\tilde{\omega}t_1+\varphi\right]} = e^{-\delta T} = konst.$$ **– útlum**

$$\boxed{\vartheta = \ln\left(x_i / x_{i+1}\right) = \delta T = 2\pi\frac{\delta}{\tilde{\omega}}}$$ **logaritmický dekrement útlumu**

**Vliv útlumu na změnu periodicity tlumených kmitů:**

| Útlum | $\vartheta$ | Poměr period |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0,5 | 0,6931 | 1,0061 |
| 0,1 | 2,3026 | 1,0650 |
| 0,05 | 2,9957 | 1,1078 |
| 0,01 | 4,6052 | 1,2398 |

**Spočítat:**

- při srovnání tlum. a netlum. kmitů, platí:

$$\boxed{\frac{\omega_0}{\tilde{\omega}} = \frac{T}{T_0} = \sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{4\pi^2}}}$$ **- odvodit**

$$\boxed{\tau = 1/\delta}$$ **- časová konstanta tlumení**

**- vyjadřuje čas, během něhož se amplituda kmitů e-krát sníží:**

$$\boxed{x(t) = e^{-t/\tau}\left[C_1e^{i\tilde{\omega}t} + C_2e^{-i\tilde{\omega}t}\right] = Ae^{-t/\tau}\sin(\tilde{\omega}t+\varphi)}$$

# III. Kritický útlum
## - astatický pohyb (δ/ω = 1)

**Je-li *δ*/*ω* = 1, pak *D* = 0 a řešením charakteristické rovnice je dvojný kořen**

**$\lambda_{1,2} = -\delta$. Pohyb přestává být pohybem periodickým.**

**Obecné řešení pohybové rovnice má tvar:**

$$\boxed{x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t)}$$

**Má-li oscilátor v okamžiku *t* = 0 výchylku z rovnovážné polohy $x_0 = A$ a nulovou rychlost $v_0 = 0$, rovnice dává :**

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t), \quad x(0) = C_1 = A$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = C_2 e^{-\delta t} - \delta(C_1 + C_2 t)e^{-\delta t}, v(0) = C_2 - \delta C_1 = 0$$

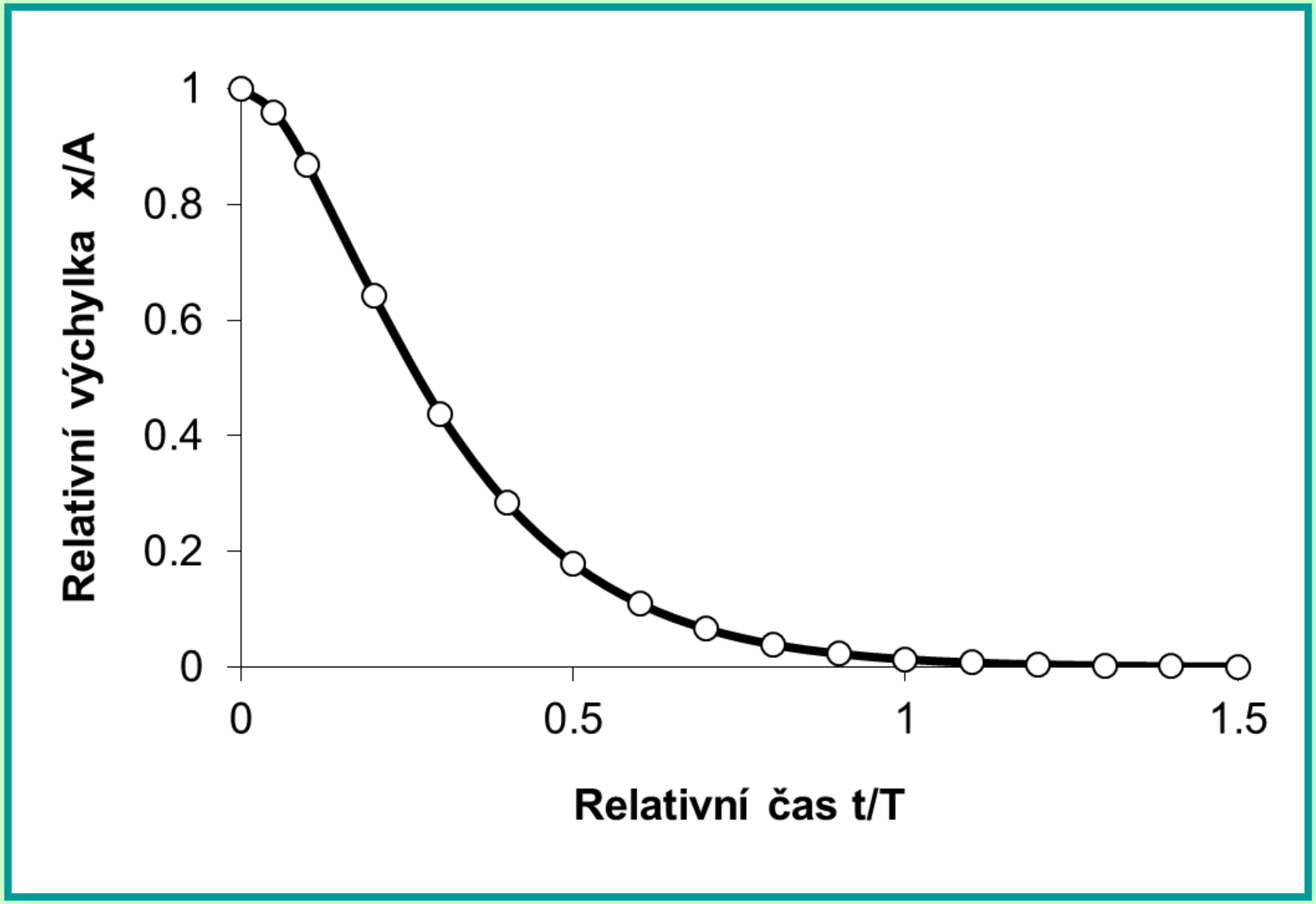
$$C_2 = \delta C_1 = \delta A$$

**- spočítat**

**Platí tedy:** $$\boxed{x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t) = Ae^{-\delta t}(1 + \delta t)}$$

**Kritického útlumu se využívá při tlumení pohybu všude tam, kde je třeba, aby se nejrychleji ustavila rovnovážná poloha.**

# III. Astatický pohyb



# IV. Přetlumené kmity - silný útlum

## ($\delta/\omega > 1$)

**Je-li $D^2 = \delta^2 - \omega^2 > 0$, potom oba kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a kladné. Obecné řešení rovnice (1) má pak neharmonický charakter. Tlumení je v tomto případě tak velké, že systém se po vychýlení z rovnovážné polohy do ní vrací zpět jen velmi pomalu. Koná při tom tzv. *aperiodický (přetlumený) pohyb.***

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta + D)t} + C_2 e^{(-\delta - D)t} = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{Dt} + C_2 e^{-Dt}\right)$$

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sinh(Dt+\varphi) = Ae^{-\delta t}\frac{e^{(Dt+\varphi)} - e^{-(Dt+\varphi)}}{2} =$$

$$= Ae^{-\delta t}\frac{e^{(Dt+\varphi)} - e^{-(Dt+\varphi)}}{2} = Ae^{-\delta t}\frac{e^{\left(\sqrt{\left(\delta^2-\omega^2\right)}\,t+\varphi\right)} - e^{-\left(\sqrt{\left(\delta^2-\omega^2\right)}\,t+\varphi\right)}}{2}$$

**- veličiny $C_1$, $C_2$ a $A$, $\varphi$ jsou určeny počátečními podmínkami stejně jako u jiných případů**

# Cvičení

1. Odvoďte vztah pro poměr mezi m-tou a n-tou maximální výchylkou oscilátoru (*m* je větší než *n*).

2. Vypočtěte relativní výchylku tlumeného oscilátoru s dekrementem útlumu $\delta = 2\omega$ a a srovnejte se stejnou závislostí vypočtenou pro oscilátor s kritickým útlumem ($\delta = \omega$).

3. Vypočtěte relativní výchylku tlumeného oscilátoru pro případ s dekrementem útlumu $\delta = n\omega$, kde *n* je číslo větší než 1. Výsledek porovnejte s relativní výchylkou u oscilátoru s kritickým útlumem.

4. Pro pokročilejšího čtenáře:
   Prostudujte práci Torzo, G., Peranzoni, P., 2009: The real pendulum: theory, simulation, experiment. Lat. Am. J. Phys. Educ. 3, 221-228. (http://www.journal.lapen.org.mx/May09/LAJPE%20241%20preprint%20f.pdf), a sestavte pohybovou rovnici kyvadla s velkou amplitudou kyvů při působení tlumení. Numericky řešte získanou rovnici a diskutujte anharmonické efekty v souvislosti s tlumením.