FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

III. Volný kmitavý pohyb

Technická fakulta

Česká zemědělská univerzita v Praze

Literatura ke kapitole 3

Brdička, M., Hladík, A.: Teoretická mechanika. Academia, Praha 1987, 581 s.

Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.

Halliday, D.,Resnick, R., Walker, J.: Fyzika. Část 1. Mechanika. VUTIUM/PROMETHEUS, Praha 2000, s. 1-328.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.

Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.

Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.

- **Kmitavý pohyb – jakýkoliv opakující se děj systému, při kterém systém nepřekročí konečnou odchylku od příslušné stabilní rovnovážné polohy**

- **Příčinou kmitavého pohybu je vratná konzervativní síla, která závisí na velikosti výchylky systému z rovnovážné polohy a směřuje proti této výchylce (působí tak, aby se systém do rovnovážné polohy vrátil)**

- **Pokud je vratná síla přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy, jedná se o lineární vratnou sílu**

- **Kmity způsobené touto silou jsou harmonické**

- **Lineární harmonický oscilátor – původce harmonických kmitů**

- **Kmitající systém i vznikající síly mohou být velmi rozmanité povahy: elastické síly u pružiny, tíhová síla u kyvadla, indukované elektromotorické napětí v elektrickém LC obvodu apod.**

Lineární harmonický oscilátor

Všechny harmonické kmity jsou popsány rovnicí:

$$\boxed{\begin{aligned}&\ddot{u}(t)+\omega^2 u(t)=0\\&\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2 u=0\end{aligned}}$$

- obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou – homogenní lineární rovnice 2. řádu

kde *u*(*t*) představuje <u>okamžitou výchylku systému z rovnovážného stavu</u> a „dvojtečka“ nad tímto symbolem označuje jeho druhou derivaci podle času a *ω* je <u>vlastní úhlová frekvence oscilátoru</u>

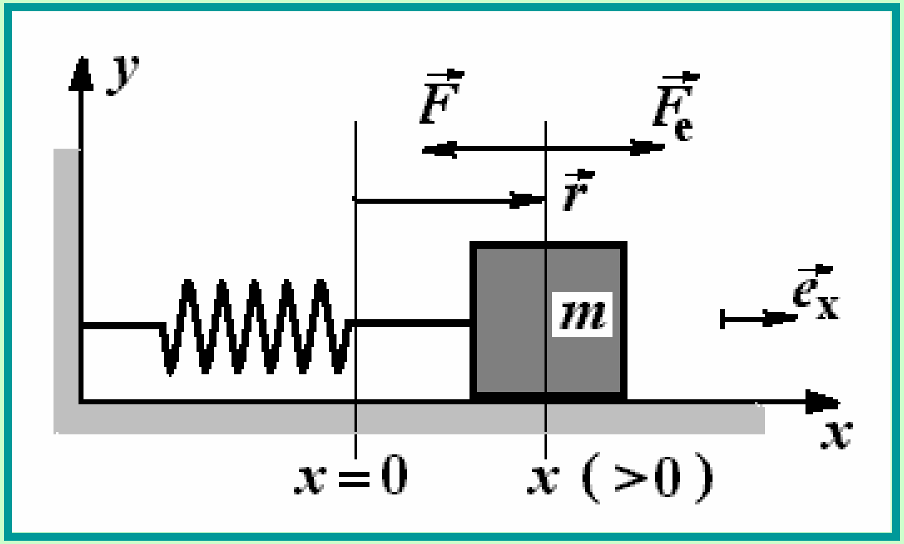
Vlastní úhlová frekvence *ω* určuje „<u>kinematiku</u>“ výchylek z rovnovážného systému, prakticky to znamená, že proces je periodický a *ω* je jeho úhlová frekvence, definujeme tedy další <u>konstantní</u> veličiny:

frekvenci *f = ω/(2π)*

periodu T = 1/f = 2π/ω

Harmonické kmity mechanické (na pružině)

- jednorozměrné (kmitání v jedné přímce)



- při vychýlení systému z rovnovážné polohy začne působit lineární vratná síla

$$F(t) = -kx(t)$$

$$[k] = \frac{N}{m}$$

k **-** silová konstanta (tuhost pružiny)

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Speciální (jednorozměrná) pohybová rovnice pro lineární harmonický oscilátor

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0}$$

$$\boxed{\omega^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Dynamické znázornění

- rozměrová zkouška

Přesné řešení pohybové rovnice

$$\boxed{\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0}$$ **- obyčejná homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty**

- předp. řešení ve tvaru $x(t)=e^{\lambda t}$

$$\boxed{\lambda^2+\omega^2=0}$$ **- charakteristická rovnice s řešením $\lambda = \pm i\omega$ – rozepsat**

$$\boxed{x(t)=C_1 e^{i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t}}$$ **- obecné řešení diferenciální pohybové rovnice**

kde integrační konstanty C_1 a C_2 musí být obecně komplexní a platí $C_2=\overline{C_1}$

- rozepsat:

$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i.\sin(\omega t)$

$A_1 = C_1 + C_2 = A \sin\varphi$ $A_2 = i(C_1 - C_2) = A\cos\varphi$

$$\boxed{x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t}$$

Obecná rovnice lineárního harmonického pohybu

Konstanty A_1 a A_2 chápeme jako složky výsledného pohybu, přičemž složka reprezentovaná konstantou A_1 představuje pohyb, u něhož výchylka nabývá hodnotu A_1 pro čas rovný nule a složka reprezentovaná konstantou A_2 představuje pohyb posunutý vůči předchozímu pohybu o π/2; platí tedy:

Alternativní vyjádření pro řešení

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \longrightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Periodicita:

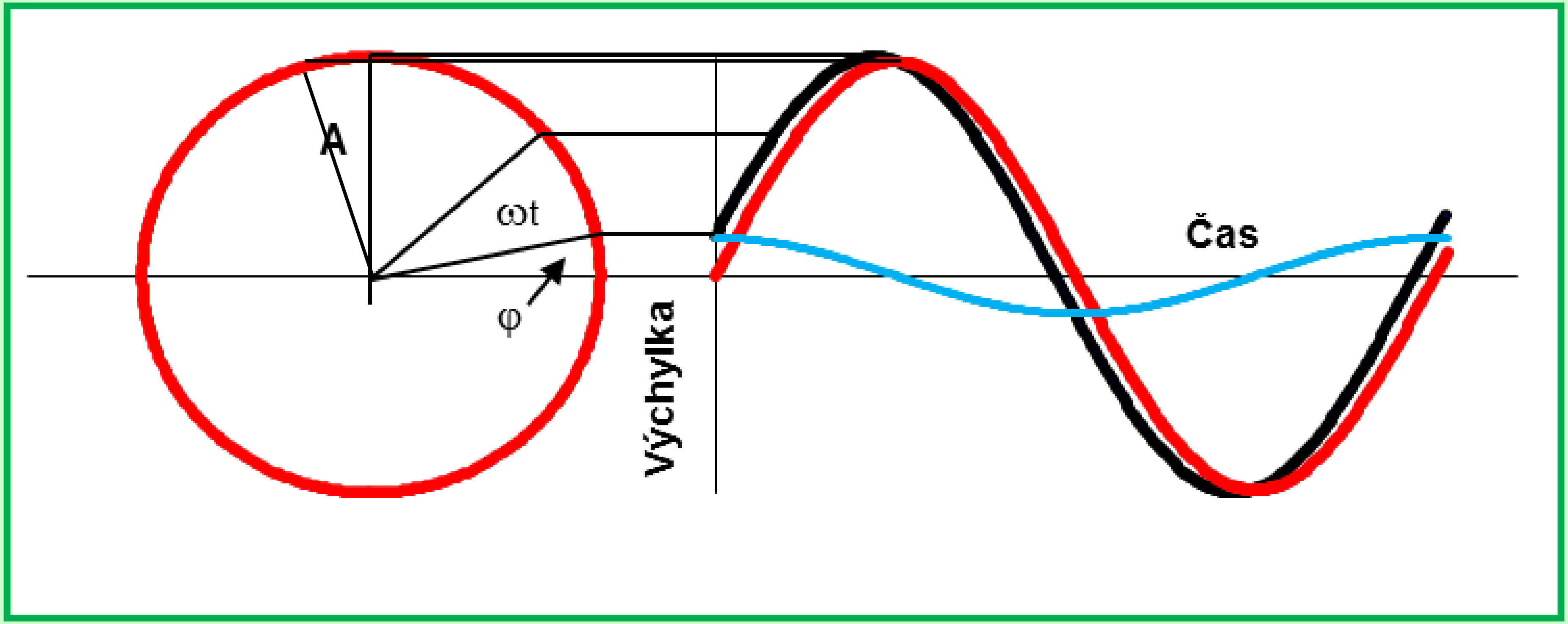
***x*(*t* + *T*) = *x*(*t*)**

$$A\sin[\omega(t+T)+\varphi] = A\sin(\omega(t)+\varphi)$$

$$\omega(t+T)+\varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Rychlost a zrychlení

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$

Odvození vztahů pro rychlost a zrychlení postupným derivováním

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = v_m\cos(\omega t + \varphi)$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) = a_m\sin(\omega t + \varphi)$$

Rychlost je vůči výchylce posunuta o π/2, zrychlení vůči výchylce je posunuto o π

$$\boxed{\begin{aligned} v_m &= A\omega \\ a_m &= -A\omega^2 \end{aligned}}$$

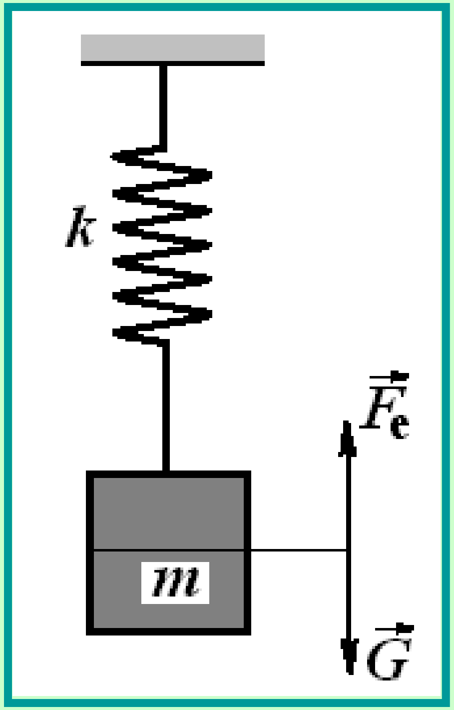
- **nepůsobí-li na kmitající systém disipativní síly, kmity jsou netlumené**
- **ilustrace na svislém kmitavém pohybu**

Lineární oscilátor v gravitačním poli

- rozepsat

$$\boxed{F = -ku + mg = m\ddot{u}}$$

Pohybová rovnice



$$\ddot{\bar{u}}(t) + \omega^2 \bar{u}(t) = 0 \qquad \bar{u}(t) = u(t) - g\omega^{-2}$$

$$u(t) = \bar{u}(t) + g\omega^{-2} = g\omega^{-2} + A\sin(\omega t + \varphi)$$

Lineární harmonický oscilátor v gravitačním poli:
Kmity s frekvencí ω kolem rovnovážné polohy u_R:

$$\boxed{u_R = g\omega^{-2} = \frac{mg}{k}} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$$

Energie netlumených harmonických kmitů

- **Odvodit potenciální energii ze stlačení pružiny**

    - **v rovnovážné poloze předpokládáme potenciální energii $E_p = 0$**

- **potenciální energie E_p odpovídající výchylce $\vec{u}(t)$ je dána prací vykonanou vnější silou $\vec{F}^*$, která překonává vnitřní pružnou sílu systému $\vec{F} = -k\vec{u}$, aby byl systém vyveden z rovnovážné polohy**

- **je tedy $\vec{F}^* = -\vec{F}$**

Energie netlumených harmonických kmitů

Potenciální energie: $$dA = \vec{F}^{*} d\vec{u} = -\vec{F} d\vec{u} = -F du$$

$$E_p = \int_0^u dA = -\int_0^u F du' = \int_0^u k u' du' = \frac{1}{2} k u^2$$

$$u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k U^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}$$

Kinetická energie: $$v(t) = \dot{u}(t) = U\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}$$

Celková energie je konstantní, na čase nezávislá:

$$\boxed{E = E_p + E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2 \left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right] = \frac{1}{2} m\omega^2 U^2}$$

- pro netlumené kmity platí zákon zachování mechanické energie

Potenciál lineárního harmonického oscilátoru

$$\boxed{\bar{u} = \frac{E_p}{m} = \frac{1}{2}\omega^2 U^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}(u\omega)^2 = -\frac{1}{2}au}$$

Cvičení

1. Hmotný bod kmitá harmonicky. Pro jeho výchylku platí:

$$\{y\} = 0{,}3\sin\left[\frac{1}{4}\pi\{t\} + \frac{1}{3}\pi\right]$$

Určete amplitudu výchylky, periodu a počáteční fázi kmitavého pohybu.

2. Hmotný bod kmitá harmonicky a za 1 minutu vykoná 180 kmitů s amplitudou 1 cm. Počáteční fáze kmitání je 60°. Napište rovnici harmonických kmitů a určete nejmenší dobu *t* před počátečním okamžikem (*t* = 0), ve kterém byla fáze nulová.

3. Hmotný bod koná harmonický pohyb s amplitudou výchylky 10 cm a dobou kmitu 1 s. Určete: a/ výchylku, rychlost a zrychlení hmotného bodu v čase 1/8 s od začátku pohybu, b/ dobu pohybu hmotného bodu z polohy rovnovážné do krajní, c/ dobu za jakou vykoná hmotný první polovinu této dráhy, d/ dobu za jakou hmotný bod vykoná druhou polovinu uvažované dráhy. Počáteční fáze kmitavého pohybu je rovna nule.

4. Mechanický oscilátor je tvořen sériově spojenými pružinami o tuhostech *k1*, *k2* a závažím o hmotnosti *m*. Určete periodu kmitů oscilátoru. Hmotnost pružin a vliv tření zanedbejte.