FYZIKA DĚJŮ A PROCESŮ

VI. Skládání kmitů a vznik vln

Technická fakulta
Česká zemědělská univerzita v Praze

Literatura ke kapitole 6

Blackstock, D.T.: Fundamentals of physical acoustics. John Wiley, New York 2000, 542 s.

Brepta, R., Prokopec, M.: Šíření napěťových vln a rázy v tělesech. Academia Praha 1972. 521 s.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha 1994, 589 s.

Crawford, F.S., Jr.: Waves. Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill College, New York, 1968, 600 s.

Friš, S.E., Timoreva, A.V.: Kurs fysiky I. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1953, 376 s.

Havránek, A.: Viskoelasticita. In: Základy fyzikálních měření, část IIb (Jaromír Brož a kol.), s. 357-376. SPN Praha, 1974.

Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fysika. SNTL, Praha 1960. 1435 s., popřípadě další opakovaná a upravovaná vydání tohoto díla.

Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988, 476 s.

Nový, R.: Hluk a chvění. ČVUT Praha, 2009, 400 s.

Pain, H.J.: The Physics of Vibrations and Waves. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2005, 556 s.

Skudrzyk, E.: Simple and Complex Vibrating Systems. The Pennsylvania State University Press, University Park 1969, 500 s.

Skládání kmitů

Kmitavý pohyb volný, tlumený i nucený je popsán lineárními diferenciálními rovnicemi. Důsledkem je tzv. <u>princip superpozice</u> (skládání). Princip superpozice znamená, že jednotlivé kmity, které koná (lineární) systém současně, se dějí nezávisle na sobě, tj. jednotlivé kmity probíhají stejně, jako kdyby se v systému uskutečňovaly samostatně. Výsledné složené kmity systému jsou pak superpozicí všech jeho kmitů probíhajících současně. Platí to pro skaláry i vektory.

<u>Skládání stejnosměrných kmitů se stejnou frekvencí</u>

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \qquad u_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad u_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

- výsledná výchylka *u* (t) z rovnovážné polohy je opět harmonická funkce

$$\boxed{u(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin\omega t\cos\varphi + A\cos\omega t\sin\varphi}$$

- rozepsat

$$u_1(t) + u_2(t) = A_1 \sin\omega t\cos\varphi_1 + A_1\cos\omega t\sin\varphi_1 + A_2\sin\omega t\cos\varphi_2 + A_2\cos\omega t\sin\varphi_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} A\cos\varphi &= A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \\ A\sin\varphi &= A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ tg\varphi &= \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{aligned}}$$

Skládání kmitů

- **z rovnice** $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ **plyne:**

- **jsou-li kmity ve fázi, tj. $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, pak**

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \Rightarrow A^2 = (A_1 + A_2)^2 \Rightarrow A = A_1 + A_2,$$

amplitudy se sčítají, kmity se zesilují

- **jsou-li kmity v protifázi, tj. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, pak**

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \Rightarrow A^2 = (A_1 - A_2)^2 \Rightarrow A = A_1 - A_2,$$

amplitudy se odečítají, kmity se zeslabují

- **pokud $A_1 = A_2$, je $A = 0$ – oba kmity se navzájem potlačí**

Skládání kmitů

Skládání stejnosměrných kmitů s různou frekvencí

$$u_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad u_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- stanovíme počátek sledování kmitavého pohybu na okamžik t_0, kdy oba dílčí kmity mají stejnou fázi: $\omega_1 t_0 + \varphi_1 = \omega_2 t_0 + \varphi_2 = \varphi$. Potom platí:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi)$$

Výsledné kmitání je periodické pouze tehdy, je-li poměr frekvencí f_1 a f_2 u obou dílčích kmitů dán poměrem celých čísel n_1 a n_2:

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Při splnění této podmínky bude výsledné kmitání popsáno periodickou a obecně neharmonickou funkcí, která se opakuje po uplynutí nejkratší doby, na kterou připadá n_1 kmitů s periodou T_1 a n_2 kmitů s periodou T_2. Tato perioda T je nejmenším společným násobkem obou period T_1 a T_2. Je-li poměr T_2/T_1 iracionální, nemohou se oba skládané kmity setkat tak, aby se pohyb mohl opakovat a pohyb tedy nemůže mít periodický charakter.

Skládání kmitů

<u>Rázy</u>

- **skládání dvou stejnosměrných kmitů s různými frekvencemi, které se vzájemně se příliš neliší, tj. platí $\omega_1 \neq \omega_2$, $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$**
- **musí být splněna podmínka** $\boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{n_1}{n_2}}$
- **dále ještě budeme předpokládat, že $\omega_1 > \omega_2$ a pro jednoduchost stejné amplitudy $A_1 = A_2 = A$.**
- **rozepsat**

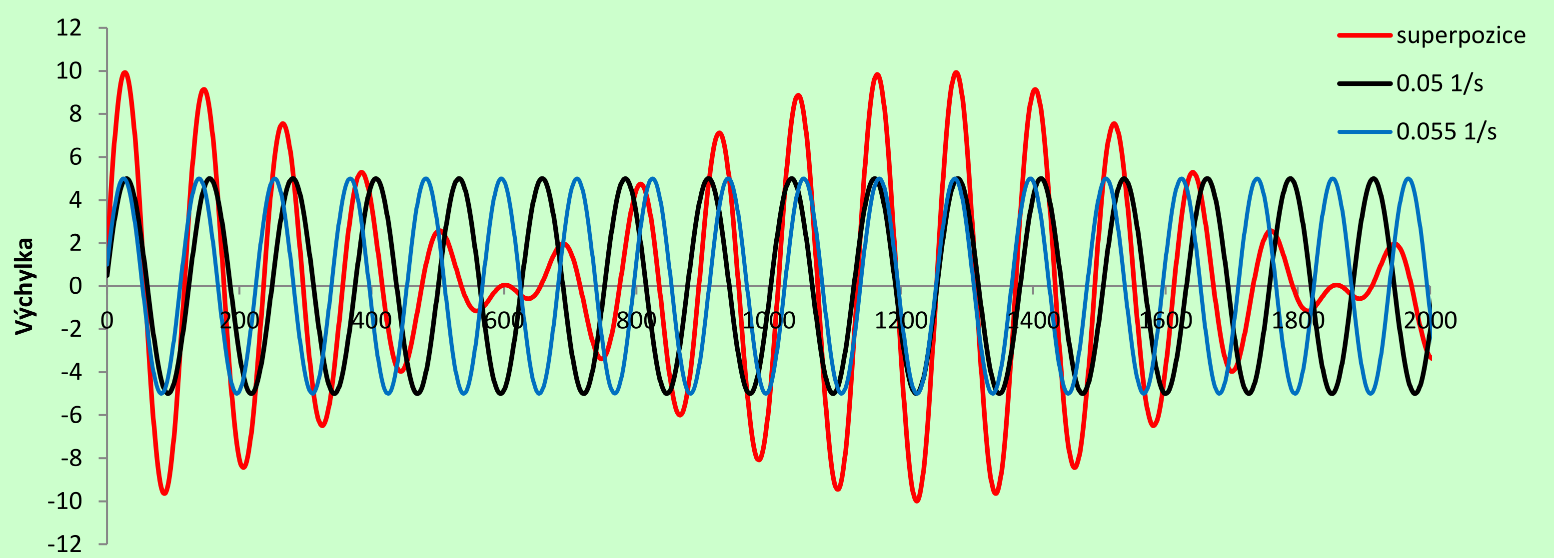
$$u_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad u_2(t) = A\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$= \tilde{A}(t)\sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]$$

Skládání kmitů

Zobrazení rázů (záznějů)



$$\tilde{A}(t) = 2A\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right]$$

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \quad resp. \quad f_m = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

Modulace, zázněje s frekvencí 2 f_m
od + a – hodnot modulace amplitudy

[Animace]

Skládání na sebe navzájem kolmých kmitů

Lissajousovy obrazce

1. Obě frekvence jsou stejné: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\vec{r}(t) = [x_1(t), x_2(t)]$$

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

- pohyb je omezen v prostoru:

$|x_1| \leq A_1$, $|x_2| \leq A_2$

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

- rovnici dráhy získáme vyloučením času z obou rovnic:

$$\left(\frac{x_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x_1 x_2}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

- rovnice elipsy

Skládání na sebe navzájem kolmých kmitů

Lissajousovy obrazce

2. <u>Obě frekvence nejsou stejné</u>:

Vznikne obecná křivka v obdélníku $-A_1 \leq x_1 \leq A_1$, $-A_2 \leq x_2 \leq A_2$

Jsou-li frekvence ω_1, ω_2 v poměru malých celých čísel n_1, n_2, tj. obě frekvence jsou soudělné

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$ **kde n_1, n_2 = 1, 2, 3, ….**

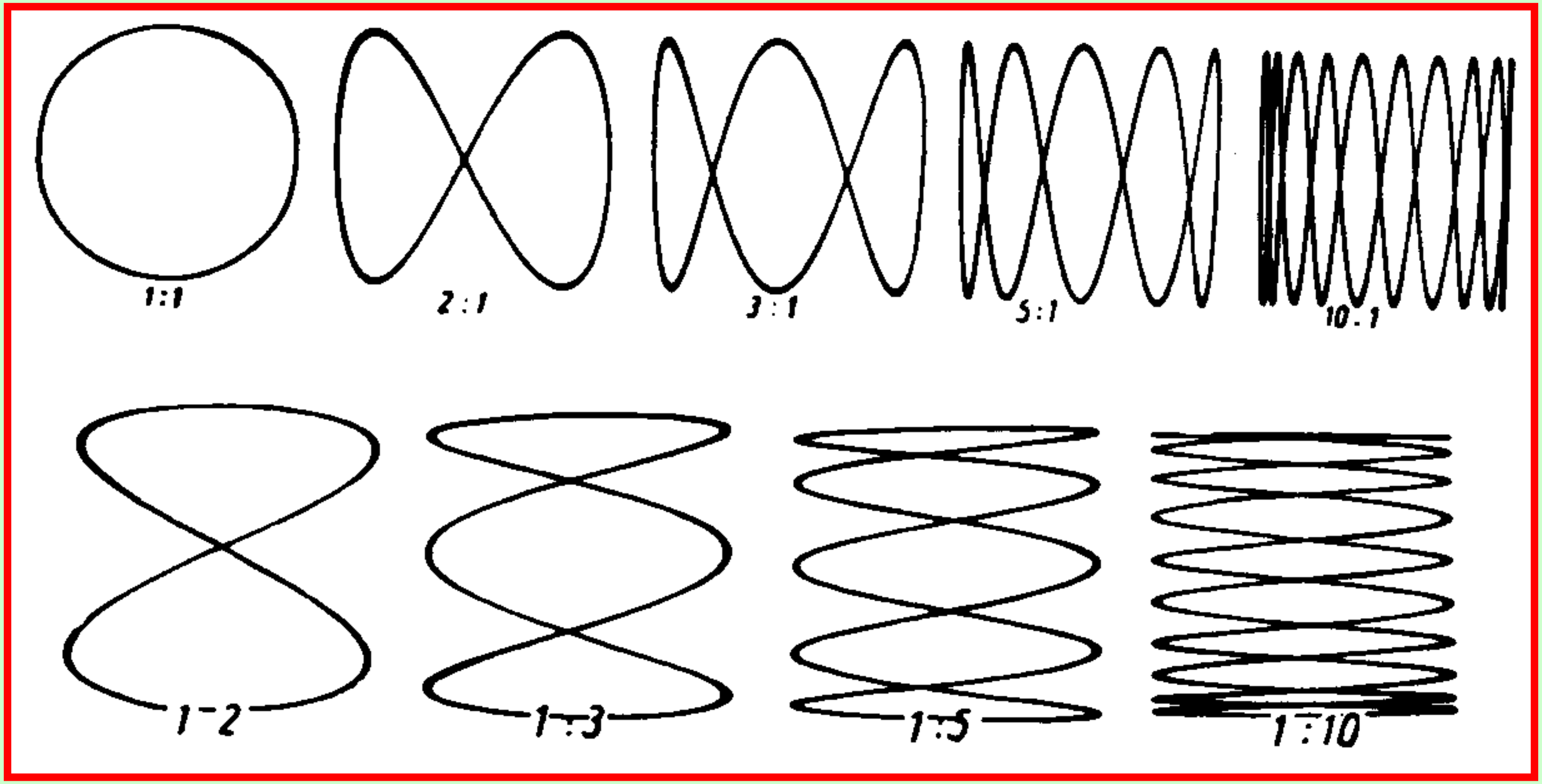
výsledné kmitání má periodický charakter. Jeho perioda bude rovna nejmenšímu společnému násobku dílčích period a jeho frekvence největšímu společnému děliteli dílčích frekvencí.

Pokud nejsou frekvence ω_1, ω_2 kolmých kmitů soudělné, tj. není-li poměr frekvencí racionálním číslem, nemá výsledné kmitání periodický charakter, výsledkem je neuzavřená křivka

Skládání kmitů v rovině

Různé frekvence v celistvých násobcích - Lissajousovy obrazce – křivky výsledných drah

b. $x = A \sin \omega_1 t; \quad y = B \sin (\omega_2 t + \varphi)$



Dvojice vázaných oscilátorů

Vazby oscilátorů 1 – webová simulace

Vazby oscilátorů 2 – webová simulace

Vazby pružin – webová simulace + experiment s modelem

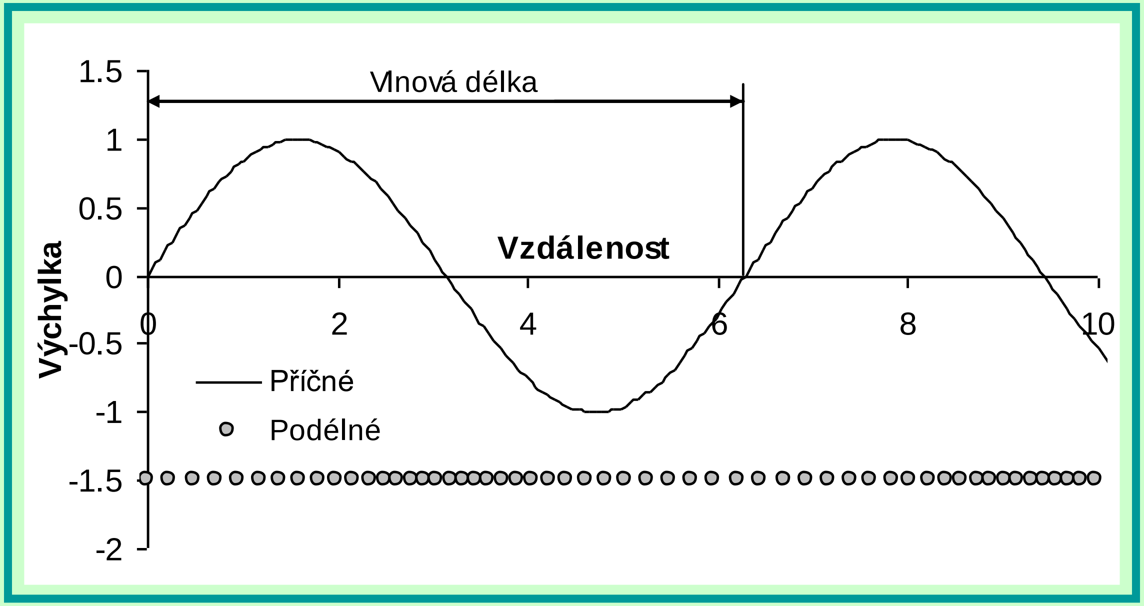
Vznik a šíření postupných vln v hmotném prostředí

- u oscilátorů vázaných mezi sebou je vybuzení jakéhokoliv z nich spojeno s buzením oscilátorů sousedních – vzniká tzv. postupná vlna
- nejjednodušší případ šíření vln je podél přímky- podélné a příčné
- rychlost šíření vlny *c* je fázová rychlost – v homogenním isotropním prostředí je konstantní
- v anisotropním prostředí je rychlost šíření vln v různých směrech různá
- ***λ*** – vlnová délka – vzdálenost kterou urazí vlnění za dobu periody ***T***

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Vznik a šíření postupných vln v hmotném prostředí

Postupné buzení oscilátorů – postupná vlna



- pokud v průběhu šíření příčné postupné vlny nedochází ke změně roviny, v níž probíhají kmity, vlna je *lineárně polarizovaná*

$$u(t,x) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = A\sin\omega\left(t - T\frac{x}{\lambda}\right) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)$$

$\frac{2\pi}{\lambda} = k$ **- úhlový vlnočet**

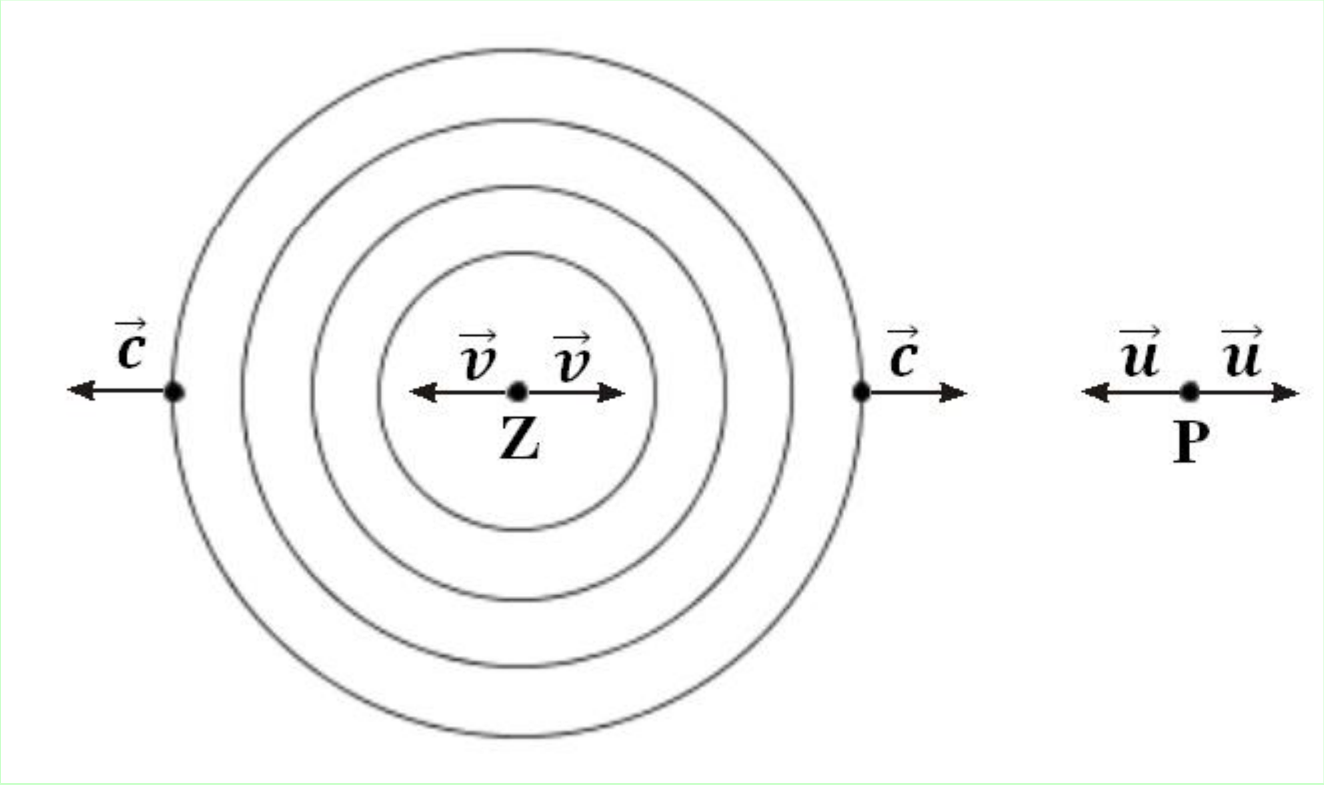
- popis časoprostorového šíření vlny - výchylka *u* je funkcí času a polohy

Interference neboli skládání vln

Stejný princip jako u skládání kmitů, navíc je třeba respektovat polohu

Dopplerův jev

- pokud se zdroj vlnění a jeho pozorovatel vzájemně pohybují, potom při vzájemném přibližování resp. vzdalování vnímá pozorovatel vyšší resp. nižší frekvenci vlnění, než je vlastní frekvence zdroje



[Animace 1]

[Animace 2]

$$f_P = f_Z \frac{c \pm u}{c \mp v}$$

→ přibližování P
→ vzdalování P
→ přibližování Z
→ vzdalování Z

Vlnová rovnice

Zjednodušené odvození pro rovinnou vlnu

Rovnice pro popis časoprostorového šíření vlny je:

$$u(t,x) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{c^2}\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Vlnová rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Obecné řešení vlnové rovnice pomocí funkcí *f* a *g*:

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

- vlny šířící se v kladném (*f*) a záporném (*g*) smyslu podél osy *x*

Elastické vlny

v hmotném prostředí

Šíření podélných vln v tenké pružné tyči - rozepsat

- **šíření vlny je spojeno se změnou osového posunutí Δu na vzdálenosti Δx,**

tj. relativní prodloužení je $\varepsilon = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

- **elementární úsek tyče o délce Δx a hmotnosti $\Delta m = \rho\,\Delta V = S\rho\,\Delta x$ je uváděn do pohybu rozdílem sil působících na koncích elementárního úseku: $\Delta m.a = \Delta F$, tj.:**

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta F \quad \textbf{(i)}$$

Z Hookeova zákona: $F = S\sigma = SE \dfrac{\partial u}{\partial x}$; vztah (i) lze zapsat: $S\rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = SE \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

- je tedy: $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\rho}{E} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$ **(ii)**

Elastické vlny

v hmotném prostředí

Šíření podélných vln v tenké pružné tyči

- **z porovnání rovnice (ii) s vlnovou rovnicí** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ **vyplývá vztah:**

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$ **- rychlost šíření podélných vln v tenké tyči**

Elastické vlny

Vybrané výrazy pro výpočet rychlosti šíření vln v hmotném prostředí

Prostředí	typ vlny	vztah	Poznámky
Pevná tělesa	příčné	$c = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$	***G*** **– modul pružnosti ve smyku** ***K*** **– objemový modul pružnosti** ***μ*** **– Poissonův poměr** ***ρ*** **- hustota**
Pevná tělesa	podélné	$c = \sqrt{\dfrac{3}{\rho}\dfrac{\mu - 1}{\mu + 3}K}$	
Struny	příčné	$c = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho}}$	***σ*** **– napětí ve strun** ***ρ*** **- hustota**
Tekutiny	podélné	$c = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$	***K*** **– objemový modul pružnosti** ***ρ*** **– hustota**

Cvičení

1. Najděte trajektorii pohybu, který vznikne složením dvou soudělných kolmých kmitů $x = r.\sin t$ a $y = r.\sin 3t$.
2. Mějme dva zdroje vlnění, jejichž úhlové frekvence se řídí vztahem: $\omega_1/\omega_2 = 9/8$. Určete v jakém poměru jsou úhlová frekvence rázů a základní frekvence vlny vzniklá interferencí obou vln.
3. Mějme dvě stejné ladičky vydávající zvuk o frekvenci $f = 435$ Hz. Jakou frekvenci mají rázy, které vnímá pozorovatel pohybuje-li se stálou rychlostí $u = 7$ m.s^{-1} ve směru od jedné ladičky ke druhé?