

# Úloha V m

## Harmonické a anharmonické kmity

### Úkol

- 1) Z dostupné literatury nastudujte problematiku harmonických a anharmonických kmitů.
- 2) Vypočítejte hodnoty doby kmitu  $T$  fyzického kyvadla pro malé a velké výchylky pro úhly v rozmezí od  $5^\circ$  do  $60^\circ$  s krokem  $5^\circ$ .
- 3) Vypočítejte teoretické hodnoty doby kmitu  $T$  fyzického kyvadla pomocí počítačové šablony.
- 4) Graficky znázorněte závislost naměřené a teoreticky vypočtené doby kmitu a rychlosti pohybu kyvadla na počáteční výchylce  $T = f(\varphi)$  a  $v = f(\varphi)$ . K tomu využijte počítačovou šablonu.
- 5) Odchylku obou hodnot doby kmitu diskutujte v závěru.

### Obecná část

Při periodickém kmitání se opakuje pravidelný průběh změn veličiny vždy po stejné době (periodě). Kmity se sinusovou závislostí amplitudy jsou kmity sinusové (harmonické). Harmonický kmit lze vyjádřit ve tvaru  $y = A \sin(\omega t + \varphi)$  nebo pomocí goniometrické funkce  $\cos$ . Ostatní jsou kmity anharmonické. Obecně podle vybuzení lze kmitání dělit na volné, vlastní a buzené. Při vychýlení soustavy z rovnovážné polohy, po uvolnění a ponechání v pohybu bez působení vnějších sil vzniká volné kmitání, které se popisuje homogenními diferenciálními rovnicemi.

Pokud síla  $F(x)$ , která vrací oscilátor do rovnovážné polohy, závisí na výchylce nelineárně, oscilátor přestává být harmonický. Hlavní rozdíl těchto kmitů oproti harmonickým spočívá v závislosti parametrů kmitajícího systému na výchylce z rovnovážné polohy, to znamená, že jejich doba kmitu je závislá na celkové energii systému  $E$ . Tento systém je nelineárním neboli anharmonickým oscilátorem. Po výchylce tělesa z rovnovážné polohy začne těleso kmitat anharmonicky – vznikají volné nesinusové kmity.

Matematickým kyvadlem (obr. 1 a) se rozumí hmotný bod o hmotnosti  $m$  upevněný na konci nehmotného závěsu o délce  $l$ , volně otáčivého kolem osy, procházející druhým koncem závěsu. Moment setrvačnosti takového kyvadla je momentem setrvačnosti hmotného bodu a je dán vztahem  $J = ml^2$ .

Dobu kmitu  $T_0$  tohoto kyvadla pro malé výchylky z rovnovážné polohy lze určit ze vztahu:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (g \text{ je tíhové zrychlení}) \quad (1)$$

Z této rovnice je vidět, že doba kmitu je nezávislá na amplitudě.

Jako analogie délky závěsu matematického kyvadla se uvádí redukovaná délka fyzického kyvadla (obr. 1 b):

$$L = J / md,$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení,  $m$  je hmotnost kyvadla,  $d$  je vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení.

Z toho plyne pro dobu kmitu fyzického kyvadla:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Redukovaná délka fyzického kyvadla se rovná délce matematického kyvadla, které má stejnou dobu kmitu jako kyvadlo fyzické.

Ve skutečnosti doba kmitu  $T$  matematického kyvadla závisí na velikosti počáteční výchylky:

$$T = T_0 \left( 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi_0 + \dots \right)$$

Rozložením funkce  $\sin \varphi$  do Taylorova rozvoje dostáváme

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

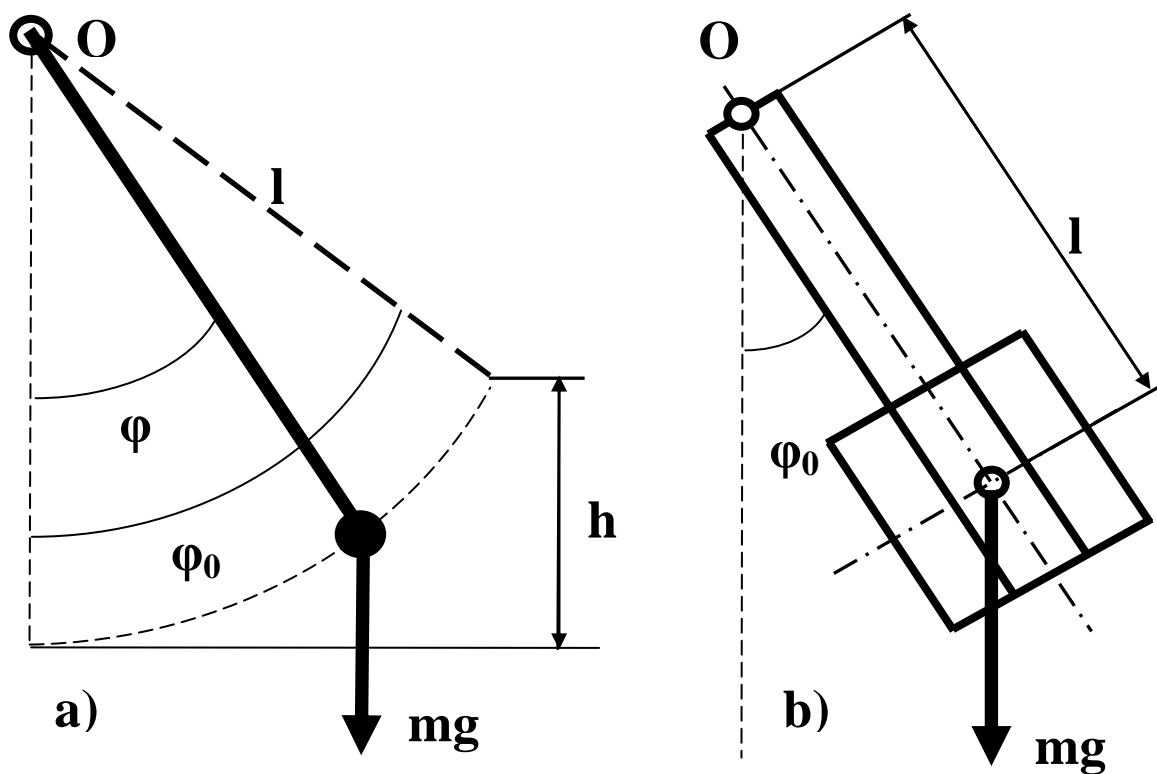
a použitím jen prvních dvou členů tohoto rozvoje obdržíme přesnější vztah pro dobu kmitu fyzického kyvadla:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgd}} \left( 1 + \frac{1}{16} \sin^2 \varphi_0 \right), \quad (2)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení,  $M$  je hmotnost kyvadla,  $g$  je místní tíhové zrychlení,  $d$  je vzdálenost těžiště od osy otáčení a  $\varphi_0$  je úhel maximální výchylky těžiště z rovnovážné polohy.

## Metoda měření

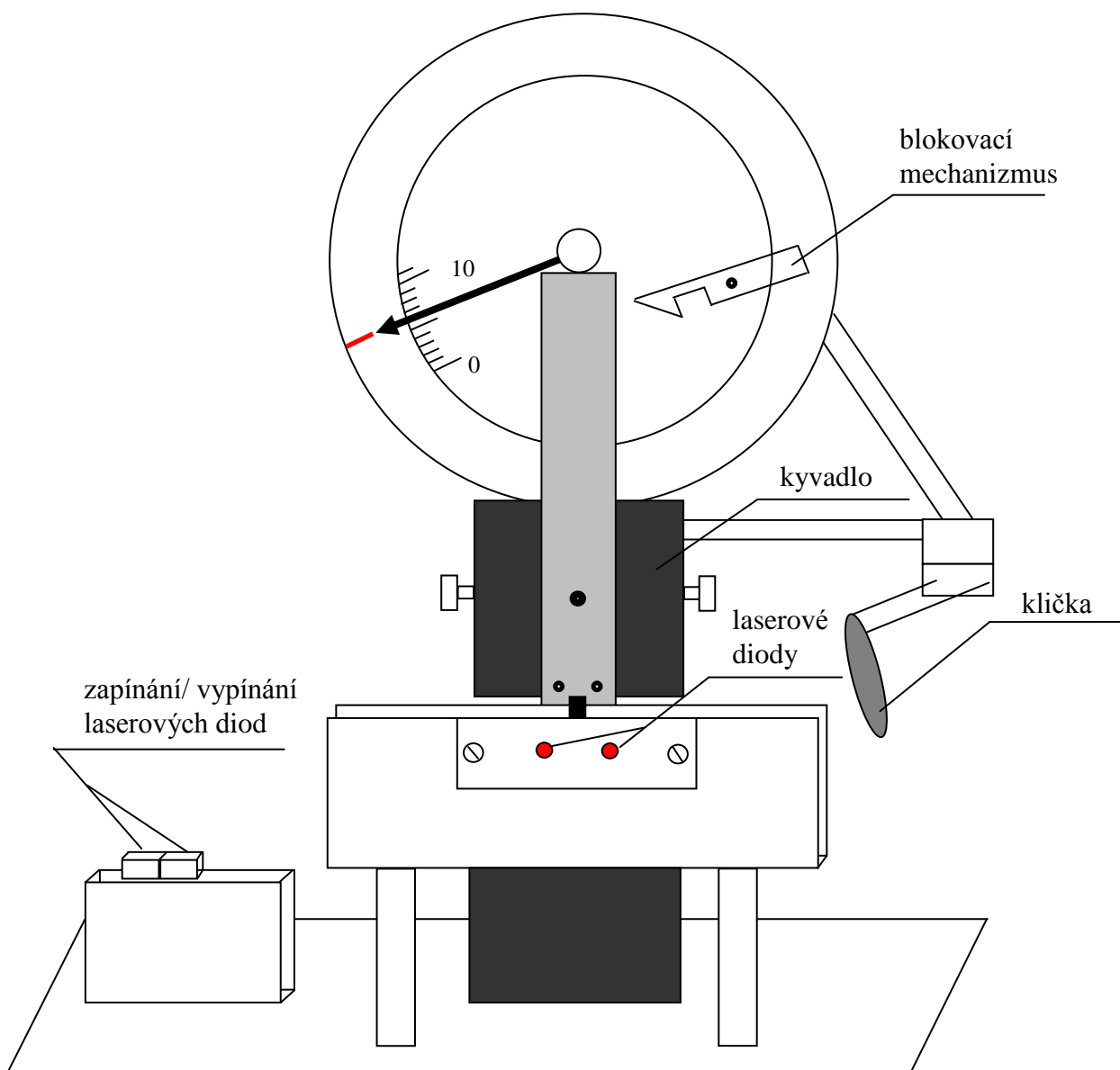
Studium harmonických a anharmonických kmitů se provádí pomocí fyzického kyvadla se zabudovanou optickou závorou. Fyzické kyvadlo je realizováno kovovým kvádrem zavěšeným na tenkém hliníkovém ramenu. Kyvadlo se rozkmitá vychýlením z rovnovážné polohy o úhel, který je nastaven otáčením speciální rukojeti ve směru hodinových ručiček. Přitom se studuje anharmonicitu kmitu při různých výchylkách. Počítá se doba kmitu pomocí optické závory a programu Audacity a zkoumá se závislost doby kmitu na amplitudě kmitů (počáteční výchylce).



Obr. 1 a) Matematické kyvadlo, b) Fyzické kyvadlo

**Provedení:**

Konstrukce je patrná z obr. 2. Jedná se o otáčivě zavěšené těleso na kyvných ramenech, jimiž je možno měnit jejich úhel výchylky od svislé osy otáčení, což způsobuje periodické kmity tělesa. Blokovací zařízení je určeno pro udržování kyvadla v mezí poloze. Odchylka od svislé osy se nastavuje otáčením rukojeti ve směru hodinových ručiček. Dvě laserové diody svítí na fotodiody umístěné naproti.



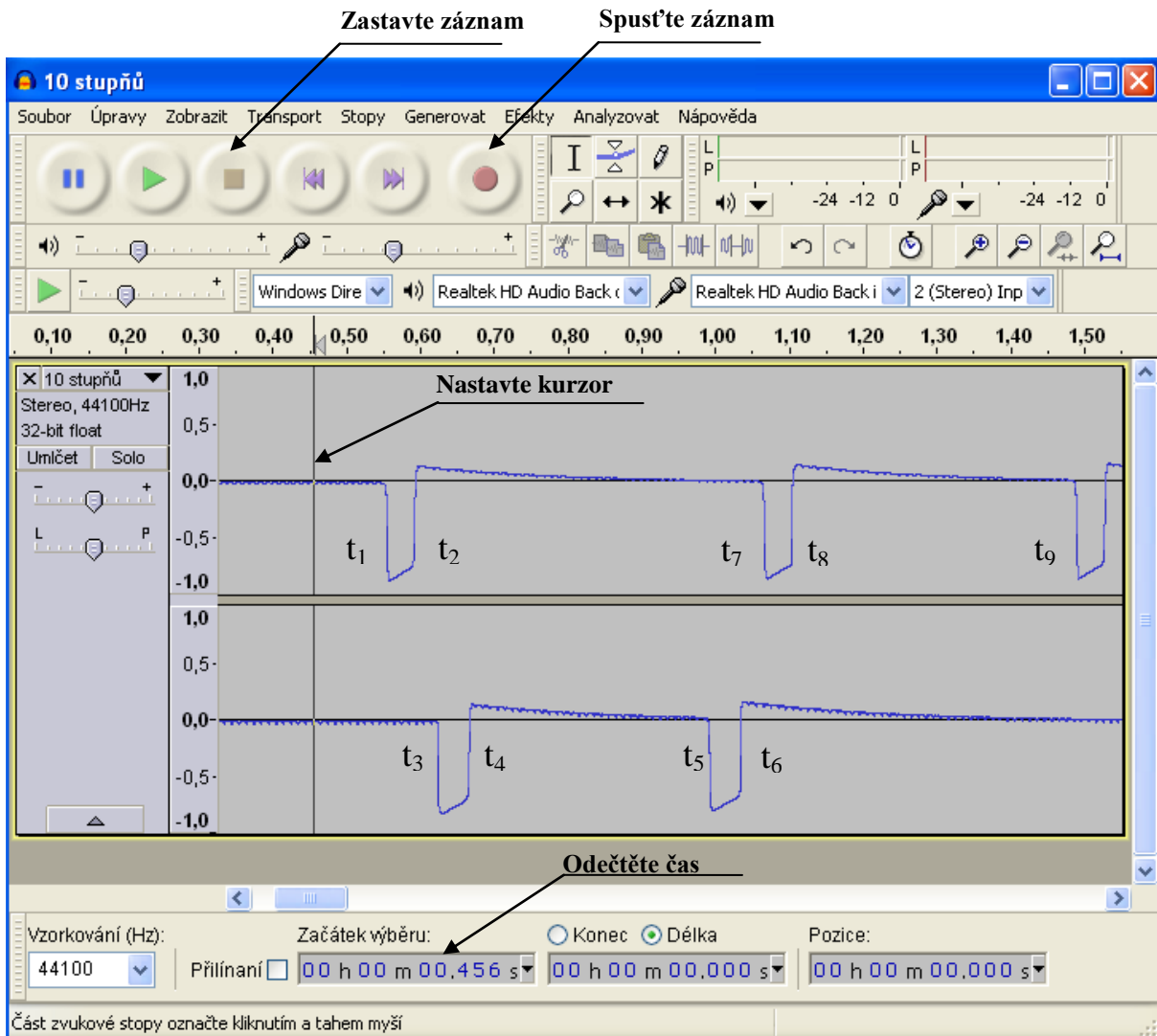
Obr. 2 Konstrukce fyzického kyvadla

## Návod k měření a zpracování

### *Postup práce:*

1. Zapněte počítač a spusťte program Audacity.
2. Zapněte čítač doby kyvu pomocí dvou tlačítek na stojanu fyzického kyvadla.
3. Otáčením kličky nastavte úhel výchylky kyvadla od svislého směru na  $5^\circ$ . Nastavená hodnota úhlu je na vnitřní stupnici kyvadla označena šipkou (viz obr. 2).
4. Tlačítkem „Záznam“ v programu Audacity začněte zaznamenávat vstupní audio signál.
5. Stlačením červené páčky blokovacího mechanismu spusťte kyvadlo. Páčku držte stlačenou po dobu cca 5 sekund.





Obr. 3 Záznam kmitů fyzického kyvadla pomocí programu Audacity

## Zhodnocení přesnosti výsledků měření

Výpočet chyb měření v této úloze neprovádějte.